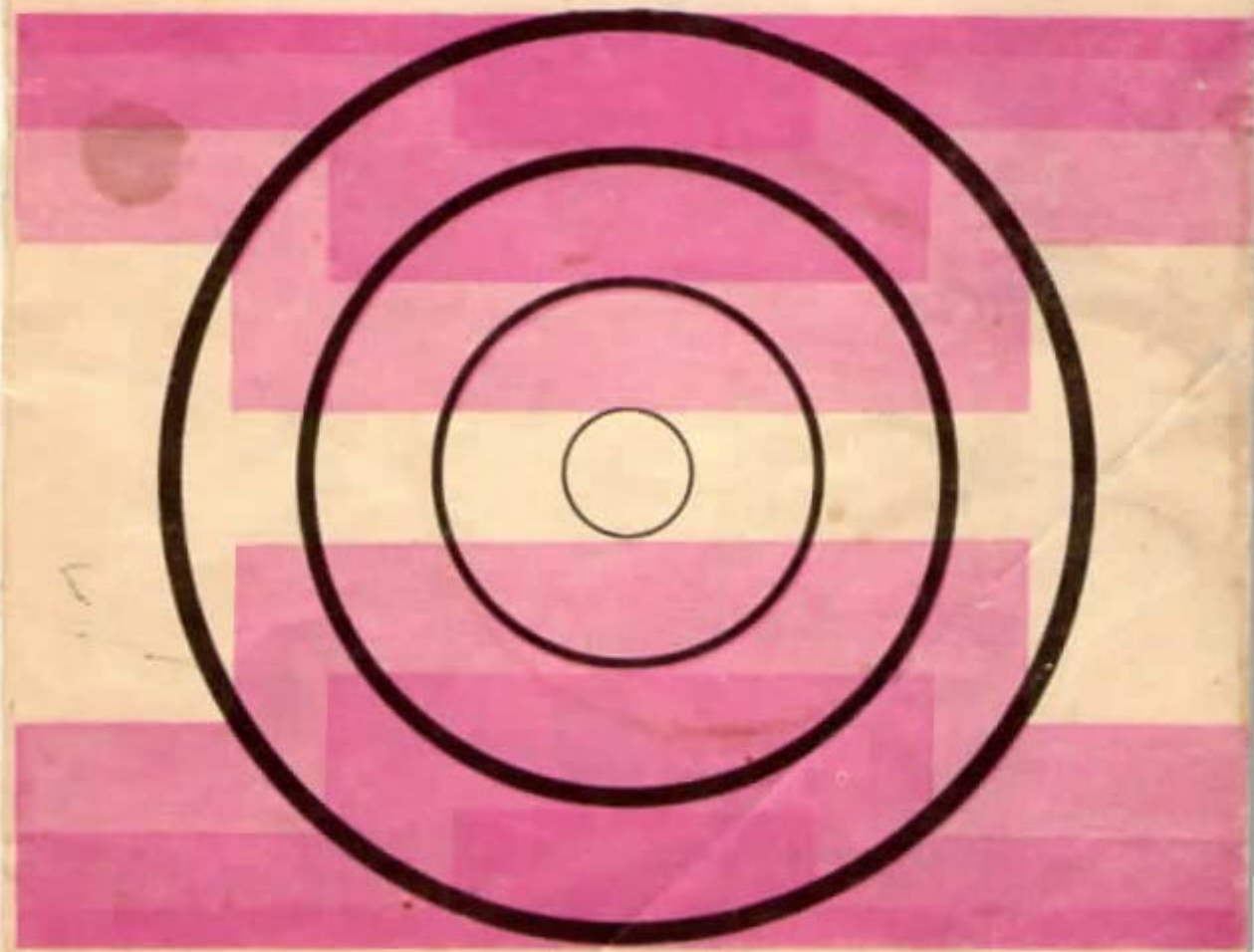
ANDREI ȚUGULEA
GHEORGHE FRĂȚILOIU
MIHAI VASILIU
MARIA CATANĂ

ELECTROTEHNICA

Manual pentru licee industriale cu profil de electrotehnică, clasa a X-a



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI – 1983

Prof. dr. doc. ing. ANDREI ȚUGULEA
Șef de lucrări dr. ing. MIHAI VASILIU
Șef de lucrări ing. GHEORGHE FRĂȚILOIU
Ing. prof. MARIA CATANĂ

ELECTROTEHNICĂ

Manual pentru licee industriale cu profil de electrotehnică, clasa a X-a

Editura didactică și pedagogică, București – 1983

Capitolul 1

ELECTROTEHNICA REGIMULUI ELECTROSTATIC

A. SARCINA ELECTRICĂ ŞI FORŢA LUI COULOMB

1. Sarcina electrică

Corpurile sînt alcătuite din atomi. Fiecare **atom** este un ansamblu de particule microscopice, avînd un *nucleu central* în jurul căruia se rotesc una sau mai multe particule identice numite *electroni*. Nucleul este cu mult mai greu decît electronii, concentrînd practic întreaga masă a atomului. Această imagine a atomului este numită „model planetar"*, datorită asemănării ei cu sistemul nostru planetar. În timp ce rotaţia în jurul soarelui se datorează însă forţelor gravitaţionale de atracţie universală, rotaţia electronilor în jurul nucleului se datorează *forţelor electrice*. Acestea se exercită deoarece atît nucleul cît şi electronii au *sarcină electrică*.

Despre orice corp care are sarcină electrică se mai spune că este încărcat cu *sarcină electrică*. Aceasta este o mărime fizică ce se determină prin analiza forţelor electrice. Simbolurile consacrate ale sarcinii electrice sînt q sau Q.

2. Forţa lui Coulomb

Cel mai simplu caz în care apar forţe electrice este acela a două mici corpuri încărcate cu sarcină electrică şi situate în vid. Aceste forţe aufost cercetate experimental de fizicianul francez *Charles Coulomb* (1736—1806) şi se numesc **forţe coulombiene.** Rezultatele cercetărilor experimentale ale lui Coulomb pot fi sintetizate astfel : *dacă două mici corpuri încărcate cu sarcinile q şi q' sînt aşezate în vid la distanţa reciprocă R* (fig. 1.1, *a* şi *b*), *asupra lor*

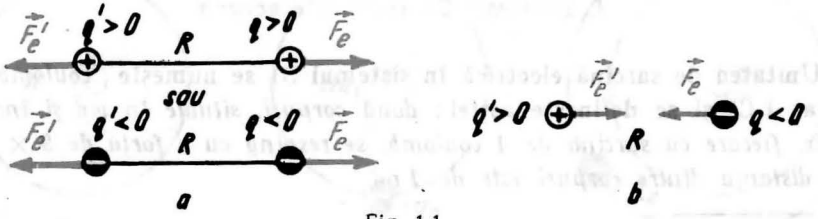


Fig. 1.1

* Modelul planetar al atomului a fost imaginat de fizicianul englez *Ernest Rutherford* (1871—1937).

se exercită forțele electrice $\vec{F}_e$ *și* $\vec{F}'_e$ (indicele „*e*" înseamnă electric), *care au următoarele proprietăți :*

— *forțele sînt egale și de sensuri opuse și se exercită pe direcția dreptei care unește cele două corpuri* (se mai spune că sînt „forțe centrale") :

$$\vec{F}'_e = -\vec{F}_e \text{ sau } \vec{F}'_e + \vec{F}_e = 0 ;$$

— *mărimile forțelor sînt direct proporționale cu produsul sarcinilor și invers proporționale cu pătratul distanței :*

$$F'_e = F_e \sim \frac{|qq'|}{R^2} ; \tag{1.1}$$

— *sarcinile electrice pot fi pozitive sau negative ;* corpurile încărcate cu sarcini de același semn ($qq' > 0$) se resping, iar corpurile încărcate cu sarcini de semne opuse ($qq' < 0$) se atrag ;

— *factorul de proporționalitate din relația (1.1) este o constantă universală,* adică o mărime care nu depinde decît de sistemul de unități, fiind independent de natura micilor corpuri sau de modul în care s-au încărcat. În sistemul de unități SI acest factor se scrie :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ unități SI.}$$

Forța lui Coulomb este deci dată de relația :

$$F_e = F'_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|qq'|}{R^2} \tag{1.2}$$

Mărimea :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9} = 8{,}85 \times 10^{-12} \text{ unități SI*} \tag{1.3}$$

este de asemenea o constantă universală, care se numește *permitivitate absolută a vidului* sau *constanta electrică absolută a vidului.*

3. Unitatea de sarcină electrică

Unitatea de sarcină electrică în sistemul SI se numește *coulomb* (prescurtat 1 C) și se definește astfel : *două corpuri, situate în vid și încărcate identic, fiecare cu sarcina de 1 coulomb, se resping cu o forță de* 9×10^9 *N cînd distanța dintre corpuri este de 1 m.*

---

* La studiul condensatoarelor vom vedea că unitatea SI de permitivitate se numește $\frac{\text{farad}}{\text{metru}}$ $\left(\text{prescurtat } \frac{\text{F}}{\text{m}}\right)$.

În adevăr, dacă $q = q' = 1$ C și $R = 1$ m, din expresia (1.2) a forței lui Coulomb rezultă:

$$F_e = F'_e = 9 \times 10^9 \text{ (u·SI)} \frac{(1 \text{ C})^2}{(1 \text{ m})^2} = 9 \times 10^9 \text{ N}.$$

Coulombul este o unitate foarte mare. În practică se folosesc mai frecvent următorii submultipli zecimali ai coulombului:

1 *microcoulomb* = 1 μC = 10^{-6} C;
1 *nanocoulomb* = 1 nC = 10^{-9} C;
1 *picocoulomb* = 1 pC = 10^{-12} C.

4. Electrizarea corpurilor

Oricare ar fi atomul unei substanțe, electronii săi sînt identici și la fel încărcați, cu sarcina negativă

$$q_e = -q_0 = -1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C}.$$

Sarcina q_0 reprezintă cea mai mică valoare a sarcinii cunoscute în natură pînă în prezent.

Sarcina q_n a nucleului este pozitivă și egală cu Zq_0, unde Z este numărul de electroni ce compun atomul considerat. De exemplu, pentru hidrogen $Z = 1$, pentru heliu $Z = 2$, pentru litiu $Z = 3$ ș.a.m.d. (fig. 1.2).

Deoarece *sarcina nucleului este egală și de semn contrar cu suma sarcinilor electronilor din același atom*, atomul apare în ansamblu neîncărcat electric, adică *neutru*.

Dacă un atom pierde sau cîștigă unul sau mai mulți electroni, el se încarcă în ansamblu pozitiv sau negativ și se numește *ion*.

Orice corp care pierde sau cîștigă electroni apare la scară macroscopică încărcat cu sarcină electrică.

De exemplu, dacă o baghetă de sticlă se freacă cu o pînză de mătase, bagheta se încarcă pozitiv (pierde electroni), iar pînza — negativ (cîștigă electroni).

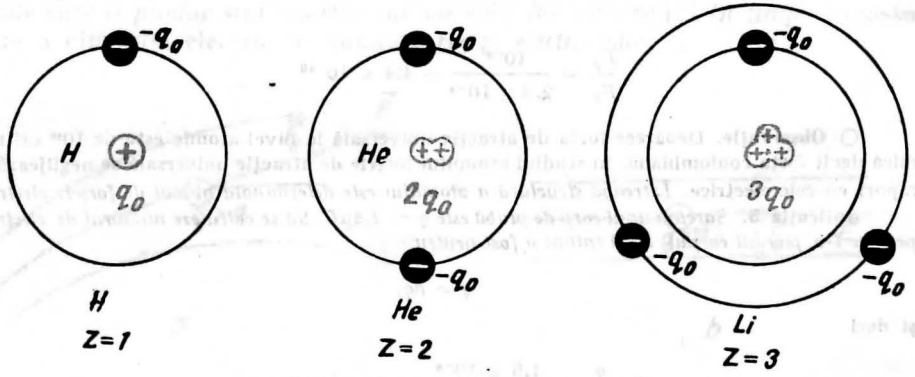


Fig. 1.2

Între corpurile încărcate cu sarcină electrică se exercită forțe electrice. Pentru a studia aceste forțe se folosesc mici corpuri metalice sau metalizate (de regulă de formă sferică) încărcate cu sarcină electrică. Ele se numesc corpuri de probă.

Aplicația 1. *Două corpuri de probă având sarcinile* $q_1 = q_2 = 1\ \mu C$ *sînt așezate în vid la distanța* $R = 2$ *m. Să se calculeze forțele electrice ce se exercită asupra lor.*

Aplicînd formula lui Coulomb (rel 1.2) obținem :

$$F_{e1} = F_{e2} = 9 \times 10^9 \frac{(10^{-6})^2}{2^2} = 2{,}25 \times 10^{-3}\ \text{N}.$$

Aplicația 2. *Să se calculeze forța coulombiană ce se exercită între nucleul și electronul unui atom de hidrogen, știind că raza orbitei circulare a electronului este* $R = 10^{-10}$ *m ;* $q_e = -1{,}6 \times 10^{-19}$ *C și* $q_n = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *C.*

$$F_e = F_n = 9 \times 10^9 \frac{(1{,}6 \times 10^{-19})^2}{10^{-20}} = 2{,}3 \times 10^{-8}\ \text{N}.$$

Aplicația 3. *Să se calculeze viteza de mișcare a electronului unui atom de hidrogen pe orbită (v. aplicația 2), știind că masa electronului este* $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg.

Egalînd forța centrifugă cu forța de atracție coulombiană, obținem :

$$\frac{m_e v^2}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_0^2}{R^2},$$

adică

$$v = q_0 \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot m_e \cdot R}} = 1{,}59 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Aplicația 4. *Să se calculeze forța de atracție universală* F_g *dintre electronul și nucleul atomului de hidrogen, știind că* $m_n = 1\,840\ m_e$ *; valoarea constantei de atracție universală este* $\gamma_0 = 6{,}68 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$.

$$F_g = \gamma_0 \frac{m_e m_n}{R^2} = 6{,}68 \times 10^{-11} \frac{1\,840 \times (9{,}1 \times 10^{-31})^2}{10^{-20}} \cong 10^{-47}\ \text{N}.$$

Raportul dintre forța de atracție universală și forța coulombiană calculată în aplicația 2 este :

$$\frac{F_g}{F_e} = \frac{10^{-47}}{2{,}3 \times 10^{-8}} = 4{,}4 \times 10^{-40}$$

○ **Observație.** Deoarece forța de atracție universală la nivel atomic este de 10^{40} ori mai mică decît forța coulombiană, în studiul atomului forțele de atracție universală se neglijează în raport cu cele electrice. *Întreaga structură a atomului este determinată numai de forțele electrice.*

Aplicația 5. *Sarcina unui corp de probă este* $q = 1{,}6\mu C$. *Să se calculeze numărul de electroni pe care i-a pierdut corpul, dacă inițial a fost neutru.*

$$q = nq_0$$

și deci

$$n = \frac{q}{q_0} = \frac{1{,}6 \times 10^{-6}}{1{,}6 \times 10^{-19}} = 10^{13}\ \text{electroni}.$$

B. CÎMPUL ELECTRIC ȘI CARACTERIZAREA LUI

1. Intensitatea cîmpului electric

● În fizica modernă, existența forțelor electrice se explică prin intermediul **cîmpului electric.**

Orice corp electrizat produce în jurul lui, chiar și în vid, o stare fizică numită cîmp electric care se manifestă prin forțe electrice ; cu alte cuvinte, ori de cîte ori se aduce în cîmp electric un corp încărcat cu sarcină electrică, asupra acestuia se exercită o forță electrică.

● Cîmpul electric este caracterizat printr-o mărime fizică numită **intensitatea cîmpului electric,** a cărei definiție este următoarea : *intensitatea cîmpului electric dintr-un punct M este o mărime vectorială* $\vec{E}$ *egală cu raportul dintre forța electrică ce se exercită asupra unui corp de probă încărcat și sarcina* q *a acestuia :*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q} \tag{1.4}$$

Din definiție rezultă relația echivalentă

$$\vec{F}_e = q\vec{E}. \tag{1.5}$$

● Deoarece nu avem simțuri speciale pentru a percepe cîmpul electric, ni-l reprezentăm intuitiv prin **linii de cîmp.** O linie de cîmp este o *curbă care este mereu tangentă la vectorul* $\vec{E}$ *în punctele prin care trece* (fig. 1.3, *a*). Un mic corp de probă, de masă foarte mică, pornind din repaus și mișcîndu-se numai sub acțiunea forței electrice, s-ar mișca cu bună aproximație chiar în lungul unei linii de cîmp.

Un *cîmp electric* se numește *omogen* sau *uniform* dacă vectorul $\vec{E}$ este același peste tot, adică are în fiecare punct aceeași mărime, direcție și sens (fig. 1.3, *b*). Un cîmp electric omogen se reprezintă prin linii de cîmp paralele și echidistante.

Cîmpul electric se numește *cîmp electrostatic atunci cînd corpurile electrizate care îl produc sînt imobile, iar sarcinile lor nu variază în timp.* Această stare a cîmpului electric se numește *regim electrostatic.*

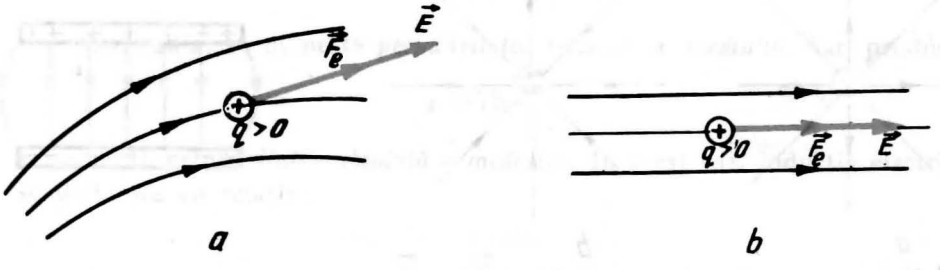


Fig. 1.3

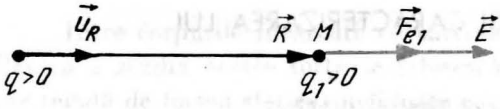


Fig. 1.4

2. Cîmpul electric coulombian

Formula lui Coulomb ne permite să calculăm intensitatea cîmpului electric produs de un mic corp încărcat cu sarcina q (fig. 1.4). Fie M punctul în care dorim să-l determinăm pe $\vec{E}$. În acest scop, aducem în punctul M un corp de probă cu sarcina q_1 și măsurăm forța $\vec{F}_{e1}$. Conform relației (1.5) :

$$\vec{F}_{e_1} = q_1 \vec{E}. \tag{1.6}$$

Dar $\vec{F}_{e_1}$ poate fi calculată și cu formula lui Coulomb :

$$\vec{F}_{e_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|qq_1|}{R^2} \cdot \vec{u}_F, \tag{1.7}$$

unde $\vec{u}_F$ este versorul (vectorul unitar) forței.

Dacă $q_1 q > 0$, atunci forța $\vec{F}_{e1}$ este de respingere și din figura 1.4 rezultă

$$\vec{u}_F = \vec{u}_R = \frac{\vec{R}}{R}$$

și

$$\vec{F}_{e_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq_1}{R^2} \frac{\vec{R}}{R}. \tag{1.7'}$$

Egalînd expresiile (1.6) și (1.7') obținem :

$$q_1 \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q}{R^2} \cdot \frac{\vec{R}}{R}$$

Simplificînd cu $q_1 \neq 0$, obținem intensitatea cîmpului electric coulombian :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot \frac{\vec{R}}{R}} \tag{1.8}$$

Dacă $q > 0$ vectorii $\vec{E}$ și $\vec{R}$ sînt paraleli și liniile de cîmp ies din sarcina q dispersîndu-se radial spre infinit (fig. 1.5, *a*). Dacă $q < 0$ vectorii

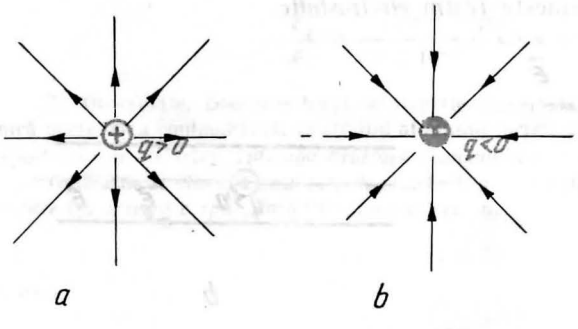


Fig. 1.5

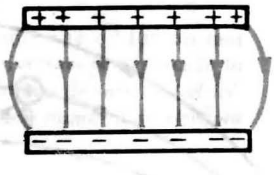


Fig. 1.6

$\vec{E}$ și $\vec{R}$ sînt antiparaleli, iar liniile de cîmp converg dinspre infinit spre sarcina q (fig. 1.5, *b*). Proprietatea liniilor de cîmp electric de a izvorî din sarcinile pozitive și de a se scurge în sarcinile negative este generală (fig. 1.6). Observăm de asemenea că *mărimea intensității cîmpului electric*, adică :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q|}{R^2}$$

este direct proporțională cu valoarea absolută a sarcinii care produce cîmpul și invers proporțională cu pătratul distanței (fig. 1.7).

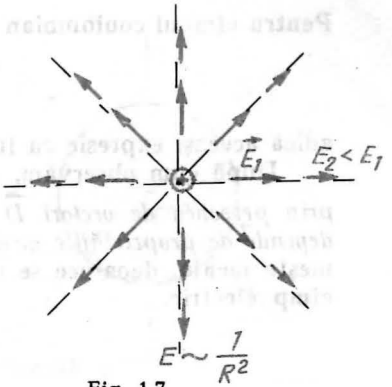


Fig. 1.7

3. Inducția electrică

● Mărimea

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}} \qquad (1.9)$$

se numește **inducție electrică în vid.** Din relația (1.8) rezultă că inducția electrică a cîmpului coulombian este :

$$\vec{D} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q}{R^2} \cdot \frac{\vec{R}}{R}.$$

● **Inducția electrică într-un mediu oarecare.** Experiența arată că dacă se introduce corpul de probă cu sarcina q într-un mediu omogen (de exemplu în ulei), intensitatea cîmpului electric se schimbă față de vid, micșorîndu-se de ε_r ori ($\varepsilon_r > 1$). Din (1.8) rezultă :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{q}{R^2} \cdot \frac{\vec{R}}{R} \qquad (1.10)$$

Mărimea ε_r se numește *permitivitatea relativă a mediului*, iar produsul

$$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$$

se numește *permitivitatea absolută a mediului*. În acest caz, inducția electrică se definește cu relația :

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}} \qquad (1.11)$$

Pentru cîmpul coulombian rezultă din (1.10)

$$\vec{D} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q}{R^2} \cdot \frac{\vec{R}}{R},$$

adică aceeaşi expresie ca în vid.

După cum observăm, *cîmpul electric în fiecare punct poate fi caracterizat prin perechea de vectori* $\vec{D}$ *şi* $\vec{E}$ *al căror factor de proporţionalitate* $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ *depinde de proprietăţile mediului.* O astfel de **caracterizare a cîmpului** se numeşte **locală,** deoarece se referă la fiecare punct din regiunea în care există cîmp electric.

4. Fluxul electric. Legea fluxului electric

● **Fluxul electric.** Considerăm un mediu omogen, în care ε_r este peste tot acelaşi, iar în acest mediu — un cîmp electric uniform. În acest caz, vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$ vor fi peste tot aceiaşi, iar liniile lor de cîmp se vor suprapune. Considerăm de asemenea o suprafaţă plană de arie A înclinată faţă de liniile de cîmp ; această înclinare poate fi definită de unghiul α pe care-l face un vector unitar $\vec{n}$ normal pe suprafaţă cu linia de cîmp (fig. 1.8).

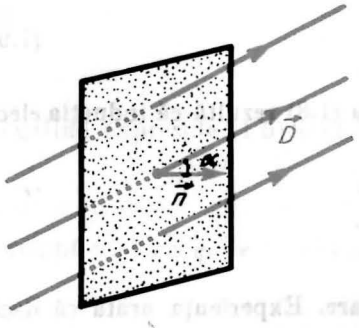


Fig. 1.8

Se numeşte *flux electric prin suprafaţa respectivă* mărimea

$$\boxed{\Psi_s = DA\cos\alpha} \qquad (1.12)$$

Se observă că (fig. 1.9, *a*, *b*, *c*) :

$$\Psi_s = DA\cos\alpha = \begin{cases} DA, & (\alpha = 0,\ \cos 0 = 1) \\ 0, & \left(\alpha = \dfrac{\pi}{2},\ \cos\dfrac{\pi}{2} = 0\right) \\ -DA, & (\alpha = \pi,\ \cos\pi = -1) \end{cases}$$

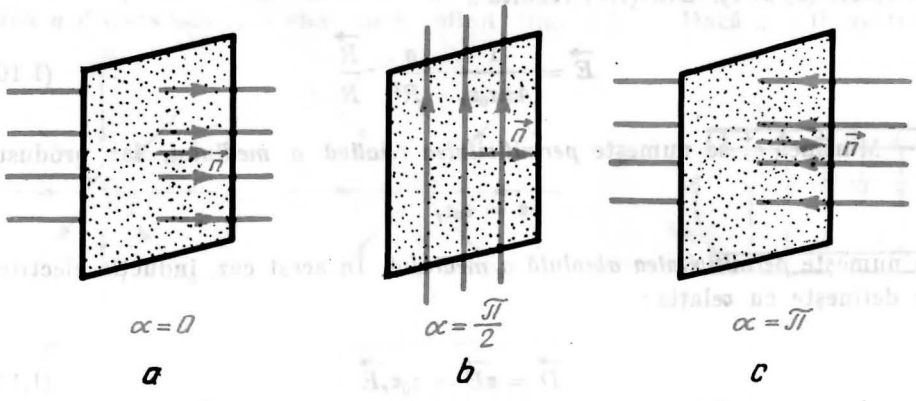


Fig. 1.9

Fluxul electric este diferit de zero și pozitiv cînd liniile de cîmp străbat suprafața în sensul versorului normal $\vec{n}$ (fig. 1.9, *a*), este negativ cînd o străbat în sens contrar (fig. 1.9, *c*) și nul cînd nu străbat (nu înțeapă sau nu traversează) suprafața (fig. 1.9, *b*).

● **Legea fluxului electric.** Dacă se consideră un corp de probă încărcat cu sarcina q și o suprafață sferică Σ de rază R și concentrică cu el (fig. 1.10), atunci în fiecare punct al sferei

$$D\cos\alpha = D\cos 0 = D = \frac{q}{4\pi R^2} = const.$$

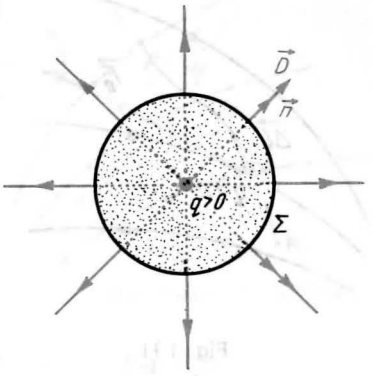


Fig. 1.10

Fluxul electric prin suprafața sferei va fi:

$$\Psi_\Sigma = D\cdot A_\Sigma = \frac{q}{4\pi R^2}\cdot 4\pi R^2 = q.$$

Relația:

$$\boxed{\Psi_\Sigma = q_\Sigma} \qquad (1.13)$$

este generală, se numește **legea fluxului electric** și se enunță astfel: *fluxul electric prin orice suprafață închisă este egal cu sarcina electrică din interiorul suprafeței.*

● **Unitatea de flux și de inducție electrică.** Din legea fluxului electric rezultă:

$$\langle\Psi\rangle = \langle q\rangle = 1\ \text{C}.$$

Deci, unitatea SI de flux electric este chiar *unitatea SI a sarcinii.*

Din definiția fluxului rezultă unitatea inducției electrice:

$$\langle D\rangle = \frac{\langle\Psi\rangle}{\langle A\rangle} = \frac{\text{C}}{\text{m}^2}.$$

Deci 1 u.SI de inducție electrică = 1 C/m².

5. Tensiunea electrică. Potențialul electrostatic

● **Tensiunea electrică.** Dacă deplasăm într-un cîmp electric, între două puncte A și B, un mic corp de probă încărcat cu sarcina q, forța electrică $\vec{F}_e$ ce se exercită asupra corpului de probă va efectua un lucru mecanic L_{AB}

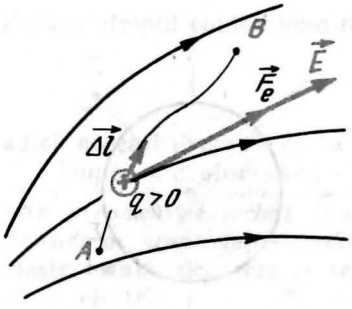


Fig. 1.11

(fig. 1.11). Prin definiție, **tensiunea electrică** U_{AB} *este raportul dintre lucrul mecanic efectuat de forța electrică ce se exercită asupra corpului și sarcina sa* :

$$U_{AB} = \frac{L_{AB}}{q} \tag{1.14}$$

Se observă că tensiunea electrică *este numeric egală cu lucrul mecanic efectuat de forța electrică ce se exercită asupra unui corp de probă încărcat cu unitatea de sarcină* (1 C). Pentru un cîmp uniform și o traiectorie rectilinie (fig. 1.12, *a*) :

$$U_{AB} = \frac{F_e l_{AB} \cos \alpha}{q} = \frac{qEl_{AB} \cos \alpha}{q} = El_{AB} \cos \tag{1.15}$$

sau, ca produs scalar :

$$U_{AB} = \vec{E} \cdot \vec{l}_{AB} \tag{1.15'}$$

Dacă $\alpha = 0$ sau π (fig. 1.12, *b*), atunci :

$$U_{AB} = \pm El_{AB}.$$

Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (fig. 1.12, *c*), atunci :

$$U_{AB} = El_{AB} \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

● **Potențialul electrostatic.** În cîmp electrostatic, respectiv în cîmpul electric produs de corpuri imobile încărcate cu sarcini constante, lucrul mecanic efectuat de forța electrică la deplasarea unui corp de probă între două

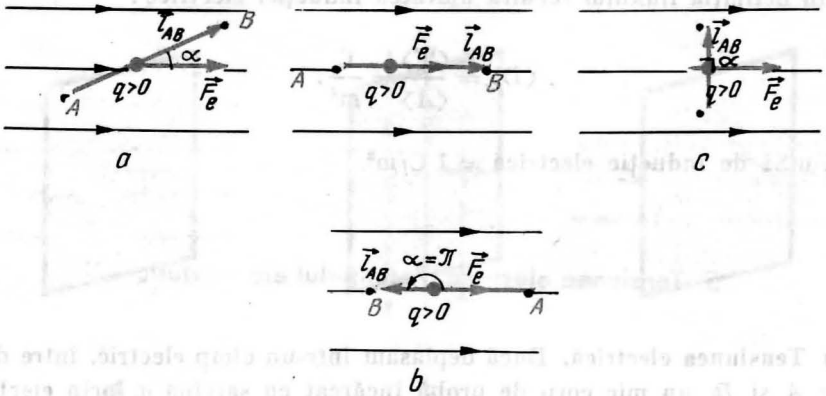


Fig. 1.12

puncte A și B nu depinde de traiectoria (drumul) după care se face deplasarea și este egal cu diferența energiilor potențiale W_p ale corpului în cele două puncte (fig. 1.13):

$$L_{AB} = W_{pA} - W_{pB}. \qquad (1.16)$$

Mărimile:

$$\boxed{V_A = \frac{W_{pA}}{q}} \text{ și } \boxed{V_B = \frac{W_{pB}}{q}} \qquad (1.17)$$

se numesc *potențialele electrostatice din punctele A și B*. Din definiția tensiunii (1.14) rezultă:

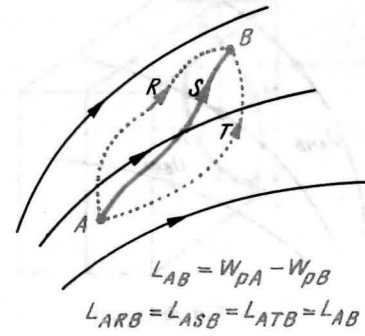


Fig. 1.13

$$U_{AB} = \frac{L_{AB}}{q} = \frac{W_{pA} - W_{pB}}{q} = \frac{W_{pA}}{q} - \frac{W_{pA}}{q} = V_A - V_B.$$

Așadar, *în cîmp electrostatic tensiunea electrică dintre două puncte nu depinde de drum și este egală cu diferența potențialelor (sau „diferența de potențial") dintre cele două puncte:*

$$\boxed{U_{AB} = V_A - V_B} \qquad (1.18)$$

Ilustrăm această proprietate cu totul remarcabilă în cazul unui cîmp uniform (fig. 1.14). Între punctele A și B alegem două drumuri: unul direct, definit de segmentul l_{AB}, și altul ocolit, definit de linia frîntă ACB de segmente l_{AC} și l_{CB}. Vom putea scrie:

$$L_{AB} = qU_{AB} = qEl_{AB} \cos \alpha;$$

$$L_{ACB} = L_{AC} + L_{CB} = qEl_{AC} \cos 0 + q\, El_{CB} \cos \frac{\pi}{2} = q\, El_{AC}.$$

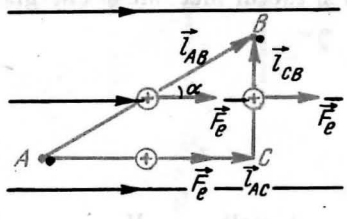


Fig. 1.14

Dar $l_{AC} = l_{AB} \cos \alpha$ (vezi triunghiul dreptunghic ABC) și deci:

$L_{AB} = L_{ACB}$, adică $U_{AB} = U_{ACB} = V_A - V_B$.

O consecință imediată a faptului că tensiunea electrică nu depinde de drum îl constituie **teorema potențialului electrostatic**, care se enunță astfel: *tensiunea electrică pe un drum închis este nulă*. În adevăr, considerînd între

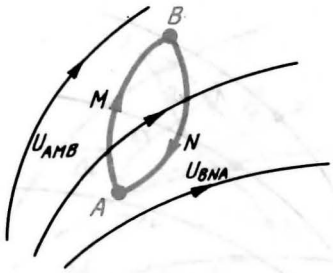


Fig. 1.15

punctele A și B (fig. 1.15) un drum închis care merge de la A la B prin M și se întoarce prin N avem :

$$U_{AMB} + U_{BNA} = (V_A - V_B) + (V_B - V_A) = 0. \quad (1.19)$$

Aceasta înseamnă că un mic corp de probă care este deplasat pe o traiectorie închisă într-un cîmp electrostatic nu primește energie de la cîmpul electrostatic, lucrul mecanic al forței electrice fiind nul *(cîmpul electrostatic* este un *cîmp potențial* sau *conservativ)*.

6. Unitate de tensiune electrică, de potențial electric și de intensitate a cîmpului electric

Din definiția tensiunii electrice rezultă :

$$\langle U_{AB} \rangle = \frac{\langle L_{AB} \rangle}{\langle q \rangle}.$$

Deci :

$$1 \text{ u.SI de tensiune} = \frac{1 \text{ joule}}{1 \text{ coulomb}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}}.$$

În sistemul SI această unitate se numește *volt* :

$$1 \text{ volt} = 1 \text{ V} = 1 \frac{\text{joule}}{\text{coulomb}}.$$

Multiplii și submultiplii cei mai uzuali ai voltului sînt :

1 *kilovolt* = 1 kV = 10^3 V ;
1 *megavolt* = 1 MV = 10^6 V ;
1 *milivolt* = 1 mV = 10^{-3} V ;
1 *microvolt* = 1 μV = 10^{-6} V.

Deoarece tensiunea electrică este egală cu diferența de potențial, rezultă că și *potențialul electrostatic se măsoară în volți.*

○ **Observație.** Deși se măsoară în aceleași unități, tensiunea și potențialul sînt mărimi fizice cu semnificații diferite ca și lucrul mecanic și energia potențială cu ajutorul cărora s-au definit.

Din relația (1.15) rezultă

$$\langle E \rangle = \frac{\langle U_{AB} \rangle}{\langle l_{AB} \rangle}.$$

Deci :

$$1 \text{ u.SI de intensitate de cîmp electric} = \frac{1 \text{ volt}}{1 \text{ metru}} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Aplicația 1. *Să determinăm inducția electrică și intensitatea cîmpului electric de o parte și de alta a unei suprafețe plane de arie A încărcate cu sarcina $q > 0$ (fig. 1.16).*

Din motive de simetrie, liniile de cîmp vor fi normale pe plan și, deoarece sarcina este pozitivă, vor izvorî din acesta. Considerăm o suprafață închisă paralelipipedică Σ care îmbracă simetric planul. Deoarece liniile de cîmp înțeapă numai bazele acestei suprafețe, conform legii fluxului electric (1.13) se poate scrie :

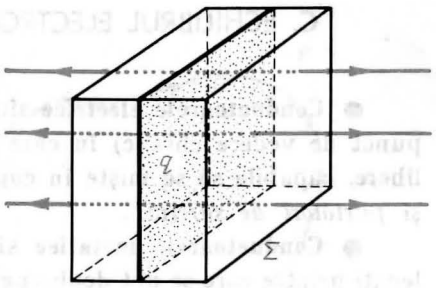


Fig. 1.16

$$\Psi_\Sigma = 2\,DA = q.$$

Rezultă $D = \frac{1}{2}\cdot\frac{q}{A} = \frac{1}{2}\rho_s$, ρ_s fiind sarcina ce revine unității de arie sau *densitatea superficială a sarcinii* (C/m²). Deci, *de o parte și de alta a planului se formează cîmpuri uniforme.*

Aplicația 2. *Considerăm două suprafețe plane paralele de arii egale A, încărcate cu sarcini egale și de semne opuse, q și $-q$* (fig. 1.17). *Să determinăm cîmpul electric compunînd vectorial cîmpurile celor două plane.*

Se observă că în regiunea din afara planelor cîmpurile sînt de sensuri opuse și se anulează reciproc. În regiunea dintre plane cîmpurile au aceeași orientare, iar cîmpul rezultant este :

$$D = D_+ + D_- = \frac{1}{2}\frac{q}{A} + \frac{1}{2}\frac{q}{A} = \frac{q}{A} = \rho_s.$$

Deci *cîmpul electric dintre plane este uniform și are inducția egală cu densitatea superficială a sarcinii electrice pe cele două plane.*

Aplicație numerică : $A = 1\ \text{m}^2$, $q = 1\mu\text{C}$, $d = 10\ \text{cm}$ (distanța între plane), $\varepsilon_r = 10$.

Vom găsi :

$$D = \frac{q}{A} = 10^{-6}\ \text{C/m}^2;$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{10^{-6}}{8{,}85 \times 10^{-12} \times 10} = 1{,}13 \times 10^5\ \frac{\text{V}}{\text{m}};$$

$$U_{AB} = Ed = 1{,}13 \times 10^5 \times 10^{-1} = 1{,}13\ \text{kV}.$$

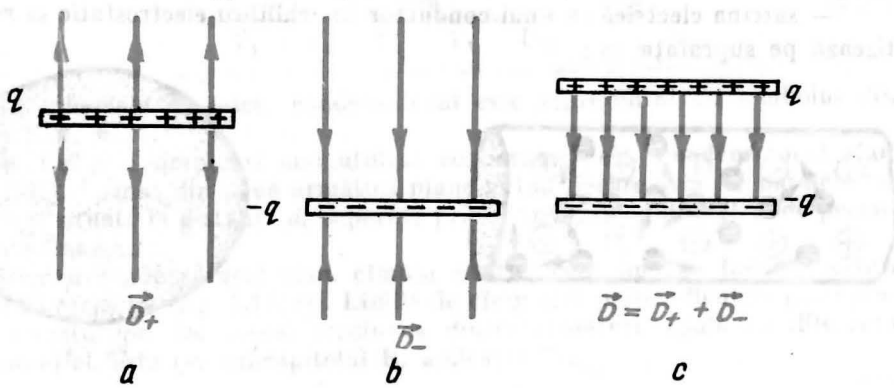


Fig. 1 17

C. ECHILIBRUL ELECTROSTATIC AL CONDUCTOARELOR

● **Conductoarele electrice** sînt corpuri (substanţe pure sau compuse din punct de vedere chimic) în care se găsesc particule microscopice încărcate libere, capabile să se mişte în cuprinsul lor. Aceste particule se mai numesc şi *purtători de sarcini.*

● **Conductoarele metalice** sînt formate dintr-o reţea de ioni pozitivi legaţi printre care se pot deplasa electronii cei mai depărtaţi de nucleee, care se numesc *electroni de conducţie* (fig. 1.18). Într-un model simplificat, aceşti electroni pot fi consideraţi liberi în interiorul conductorului, mişcîndu-se haotic sub efectul agitaţiei termice, ca particulele unui „gaz electronic".

Dacă în conductor se stabileşte un cîmp electric, acesta imprimă o mişcare ordonată electronilor liberi şi produce un curent electric.

● Pentru ca să nu existe curent electric, care ar perturba regimul electrostatic, trebuie ca forţa electrică ce se exercită asupra electronilor şi, ca urmare, intensitatea cîmpului electric din conductor să fie nule :

$$\vec{F}_e = -q_0\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0. \tag{1.20}$$

Această relaţie constituie **condiţia de echilibru electrostatic al unui conductor** şi are două consecinţe importante :

— orice conductor în echilibru electrostatic este echipotenţial (fig. 1.19).

În adevăr, considerînd două puncte arbitrare A şi B se obţine :

$$L_{AB} = -q_0U_{AB} = -q_0(V_A - V_B) = 0 \Rightarrow V_A = V_B \tag{1.21}$$

deoarece forţa electrică este nulă şi nu se produce lucru mecanic. Deci toate punctele conductorului au acelaşi potenţial (conductorul este echipotenţial).

— sarcina electrică a unui conductor în echilibru electrostatic se repartizează pe suprafaţa sa ;

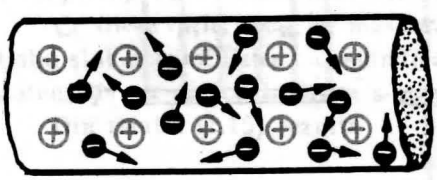


Fig. 1.18

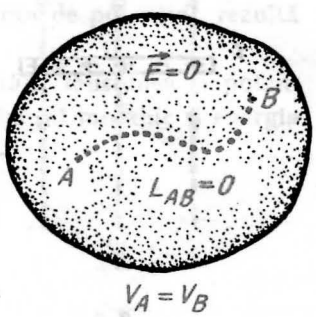


Fig. 1.19

În adevăr, deoarece $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = 0$ în orice punct din interiorul conductorului, fluxul electric prin orice suprafață închisă Σ_i conținută în conductor (fig. 1.20) este nul.

Conform legii fluxului electric se obține :

$$\Psi_{\Sigma_i} = q_{\Sigma_i} = 0 \Rightarrow q_{\Sigma_i} = 0, (\forall)\Sigma_i$$

Deci, nu există sarcină electrică în interiorul suprafeței Σ_i.

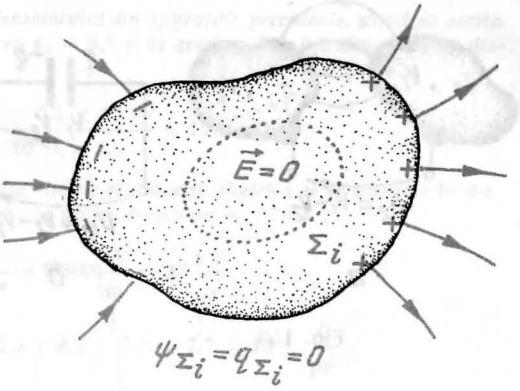


Fig. 1.20

Aceasta înseamnă că dacă un conductor este încărcat negativ, adică are un surplus de electroni, aceștia se repartizează numai în vecinătatea suprafeței sale exterioare ; tot astfel, pentru un conductor încărcat pozitiv, lipsesc electroni numai la limita suprafeței exterioare.

D. CONDENSATORUL ELECTRIC. REȚELE DE CONDENSATOARE

1. Capacitatea electrică

● Se numește **condensator electric** *un sistem de două conductoare separate printr-un izolant (dielectric)* (fig. 1.21, *a*).

Dacă între conductoarele condensatorului, numite *armături*, echipotențiale în regim electrostatic, se aplică o diferență de potențial $V_1 - V_2$, acestea se încarcă cu sarcini egale și de semne opuse $q_1 = q$ și $q_2 = -q$. Se numește *capacitate electrică* raportul :

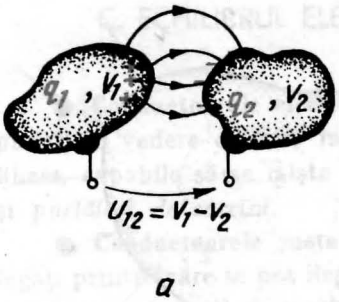
$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{-q}{V_2 - V_1} = \frac{q}{U_{12}} = \frac{-q}{U_{21}} \qquad (1.22)$$

În schemele electrice, condensatorul este reprezentat cu simbolul din figura 1.21, *b*.

● Cel mai simplu și mai utilizat condensator este **condensatorul plan** (fig. 1.22), format din două armături plane având fiecare aria A, paralele între ele și situate la distanța d, separate printr-un strat de dielectric de permitivitate $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$.

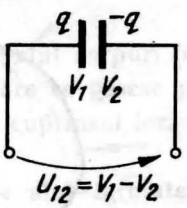
Pentru condensatorul plan, cîmpul electric este omogen între armături și nul în afara lor (fig. 1.17, *c*) . Liniile de cîmp sînt perpendiculare pe suprafața armăturilor. De aceea, tensiunea dintre armături, egală cu diferența de potențial, este (v. subcapitolul B, aplicația 2) :

$$U_{12} = V_1 - V_2 = Ed = \frac{D}{\varepsilon}d = \frac{q_1}{\varepsilon A}d.$$



a

Fig. 1.21



b

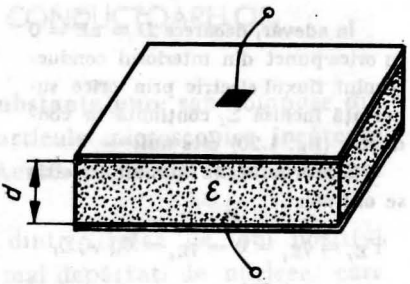


Fig. 1.22

Rezultă astfel *capacitatea condensatorului plan :*

$$C = \frac{q_1}{U_{12}} = \frac{\varepsilon A q_1}{q_1 d}\ ; \quad \boxed{C = \frac{\varepsilon A}{d}} \tag{1.23}$$

Capacitatea nu depinde de sarcinile armăturilor și nici de diferența de potențial dintre acestea, fiind direct proporțională cu aria unei armături și invers proporțională cu distanța dintre ele.

○ **Observație.** Dacă între armături în loc de dielectric este vid, atunci capacitatea este :

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\ .$$

Din raportul :

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r$$

se poate determina permitivitatea relativă a dielectricilor, prin măsurarea capacității unui condensator cu și fără dielectric.

● **Unitatea de capacitate** se numește *farad* (F) : $1\ \text{F} = \frac{1\ \text{C}}{1\ \text{V}}$.

Din expresiile capacității condensatorului rezultă unitățile de permitivitate a vidului și de permitivitate absolută a unui corp :

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{\langle C \rangle \langle d \rangle}{\langle A \rangle} = 1\ \frac{\text{F}}{\text{m}}.$$

Aplicația 1. *Să se calculeze capacitatea unui condensator știind că se încarcă cu 440 μC atunci cînd i se aplică tensiunea de 220 V.*

$$C = \frac{q}{U} = \frac{440 \times 10^{-6}}{220} = 2 \times 10^{-6}\ \text{F} = 2\ \mu\text{F}.$$

Aplicația 2. *Ce tensiune trebuie aplicată condensatorului din aplicația precedentă pentru ca acesta să se încarce cu 80 μC ?*

$$U = \frac{q}{C} = \frac{80 \times 10^{-6}}{2 \times 10^{-6}} = 40\ \text{V}.$$

Aplicația 3. *Care este aria armăturii condensatorului din aplicațiile precedente, știind că acesta este plan și are drept dielectric o foaie de hîrtie cu* $\varepsilon_r = 3{,}5$ *și de grosime* $d = 0{,}2$ *mm egală cu distanța între armături ?*

$$A = \frac{Cd}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{2 \times 10^{-6} \times 0{,}2 \times 10^{-3}}{8{,}85 \times 10^{-12} \times 3{,}5} = 12{,}9 \text{ m}^2.$$

Aplicația 4. *Care este intensitatea cîmpului electric și inducția electrică ce se stabilesc în dielectricul condensatorului de mai sus, atunci cînd i se aplică tensiunea de* 500 *V ?*

$$E = \frac{U}{d} = \frac{500}{0{,}2 \times 10^{-3}} = 2\,500 \frac{\text{kV}}{\text{m}} = 25 \frac{\text{kV}}{\text{cm}};$$

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = 8{,}85 \times 10^{-12} \times 3{,}5 \times 2{,}5 \times 10^6 = 7{,}7 \times 10^{-5} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}.$$

Aplicația 5. *Ce tensiune maximă se poate aplica condensatorului știind că intensitatea cîmpului electric care produce străpungerea dielectricului (rigiditatea dielectrică) este* $E_{str} = 2\,500 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$ *?*

$$U_{max} = U_{str} = E_{str} \cdot d = 2\,500 \times 0{,}02 = 50 \text{ kV}.$$

2. Legarea condensatoarelor în serie

● În figura 1.23 sînt reprezentate **două condensatoare de capacități** C_1 **și** C_2 **legate în serie.** Dacă la bornele ansamblului se aplică diferența de potențial $V_1 — V_2$, armătura pozitivă a primului condensator se încarcă cu sarcina q, iar armătura negativă a celui de-al doilea condensator se încarcă cu sarcina $—q$.

Pe armăturile interioare se vor separa corespunzător sarcinile $—q$ și q. *Ansamblul se comportă ca un singur condensator echivalent a cărui capacitate se definește prin raportul :*

$$C_e = \frac{q}{V_1 — V_2}.$$

Deoarece :

$$V_1 — V_2 = (V_1 — V_{1'}) + (V_{2'} — V_2), \text{ (cu } V_{1'} = V_{2'}),$$

iar :

$$C_1 = \frac{q}{V_1 — V_{1'}} \text{ și } C_2 = \frac{q}{V_{2'} — V_2},$$

rezultă :

$$\frac{1}{C_e} = \frac{V_1 — V_2}{q} = \frac{V_1 — V_{1'}}{q} +$$

$$+ \frac{V_{2'} — V_2}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

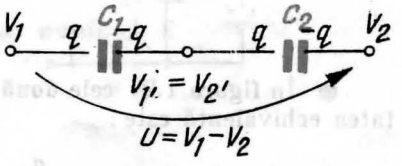


Fig. 1.23

sau

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \tag{1.24}$$

● **Pentru n condensatoare legate în serie,** se obține similar :

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}.$$

Deoarece :

$$\frac{1}{C_e} > \frac{1}{C_1}; \frac{1}{C_2}; \ldots; \frac{1}{C_n},$$

rezultă :

$$C_e < min\ (C_1,\ C_2, \ldots,\ C_n).$$

Pentru cazul particular în care $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = C$, se obține :

$$C_e = \frac{C}{n} \tag{1.25}$$

Aplicație. *Condensatoarele $C_1 = 2\mu F$ și $C_2 = 4\mu F$ sînt legate în serie. Să se calculeze capacitatea echivalentă și tensiunile ce se stabilesc la bornele fiecăruia atunci cînd i se aplică ansamblului tensiunea $U = 300$ V*

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2 \times 4}{2 + 4} = \frac{4}{3}\ \mu F;$$

$$q = C_e U = \frac{4}{3} \times 300 \times 10^{-6} C = 400\ \mu C;$$

$$U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{400 \times 10^{-6}}{2 \times 10^{-6}} = 200\ V;$$

$$U_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{400 \times 10^{-6}}{4 \times 10^{-6}} = 100\ V.$$

○ **Se observă că $\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1}$, adică tensiunile sînt invers proporționale cu capacitățile.**

3. Legarea condensatoarelor în paralel

● În figura 1.24 cele **două condensatoare sînt legate în paralel.** Capacitatea echivalentă este :

$$C_e = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{q_1}{V_1 - V_2} + \frac{q_2}{V_1 - V_2},$$

deci :

$$\boxed{C_e = C_1 + C_2} \qquad (1.26)$$

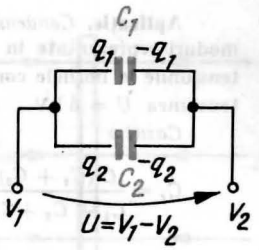


Fig. 1.24

Pentru n condensatoare legate în paralel se obține similar :

$$\boxed{C_e = C_1 + C_2 + \ldots + C_n,}$$

iar dacă $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = C$ rezultă :

$$\boxed{C_e = nC} \qquad (1.27)$$

În acest caz :

$$C_e > max\ (C_1,\ C_2, \ldots, C_n).$$

Aplicație. *Condensatoarele $C_1 = 2\mu F$ și $C_2 = 4\mu F$ sînt legate în paralel. Să se calculeze capacitatea echivalentă și sarcinile cu care se încarcă fiecare atunci cînd ansamblului i se aplică tensiunea $U = 1\,000$ V.*

$$C_e = C_1 + C_2 = 2 + 4 = 6\ \mu F\ ;$$

$$q = C_e U = 6 \times 10^{-6} \times 10^3 = 6\,000\ \mu C\ ;$$

$$q_1 = C_1 U = 2 \times 10^{-6} \times 10^3 = 2\,000\ \mu C\ ;$$

$$q_2 = C_2 U = 4 \times 10^{-6} \times 10^3 = 4\,000\ \mu C.$$

○ **Observație.** $q = q_1 + q_2$. Sarcinile q_1 și q_2 sînt deci direct proporționale cu capacitățile.

4. Legarea mixtă a condensatoarelor

În figurile 1.25, *a*, *b* sînt date două exemple de legături mixte. Aplicînd succesiv relațiile deduse mai sus, se obține :

$$C_e = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}\ ; \qquad (1.28,\ a)$$

și

$$C_e = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}\ . \qquad (1.28,\ b)$$

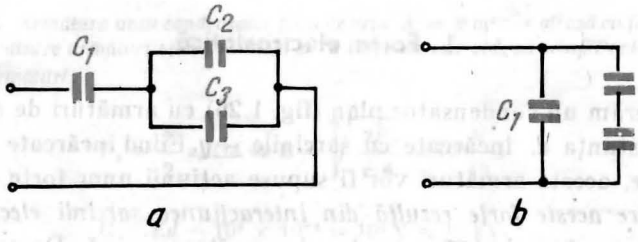


Fig. 1.25

Aplicație. *Condensatoarele* $C_1 = 2\mu F$, $C_2 = 4\mu F$ și $C_3 = 6\mu F$ sînt legate mixt în cele două moduri reprezentate în figura 1.25, *a*, *b*. Să se calculeze capacitățile echivalente, sarcinile și tensiunile la bornele condensatoarelor în cele două cazuri, atunci cînd ansamblului i se aplică tensiunea $U = 6$ kV.

Cazul a:

$$C_e = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{2(4 + 6) \times 10^{-12}}{(2 + 4 + 6) \times 10^{-6}} = \frac{5}{3}\ \mu F;$$

$$q = q_1 = C_e U = \frac{5}{3} \times 10^{-6} \times 6 \times 10^3 = 10^4\ \mu C;$$

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{10^4 \mu C}{2\mu F} = 5\,000\ V = 5\ kV;$$

$$U_2 = U_3 = U - U_1 = 6\,000 - 5\,000 = 1\,000\ V = 1\ kV;$$

$$q_2 = C_2 U_2 = 4 \times 10^{-6} \times 10^3 = 4\,000\ \mu C;$$

$$q_3 = C_3 U_3 = 6 \times 10^{-6} \times 10^3 = 6\,000\ \mu C.$$

Cazul b:

$$C_e = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = 2 \times 10^{-6} + \frac{4 \times 6 \times 10^{-12}}{(4 + 6) \times 10^{-6}} = 4{,}4\ \mu F;$$

$$q = C_e U = 4{,}4 \times 10^{-6} \times 6 \times 10^3 = 2{,}64 \times 10^4\ \mu C;$$

$$q_1 = C_1 U = 2 \times 10^{-6} \times 6 \times 10^3 = 1{,}2 \times 10^4\ \mu C;$$

$$q_2 = q_3 = q - q_1 = 2{,}64 \times 10^4 - 1{,}2 \times 10^4 = 1{,}44 \times 10^4\ \mu C;$$

$$U_1 = U = 6\ kV;$$

$$U_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{1{,}44 \times 10^4 \mu C}{4\mu F} = 3{,}6\ kV;$$

$$U_3 = \frac{q_3}{C_3} = \frac{1{,}44 \times 10^4 \mu C}{6\mu F} = 2{,}4\ kV;$$

$$U_2 + U_3 = U.$$

E. FORȚELE ELECTROSTATICE. ENERGIA ELECTROSTATICĂ

1. Forța electrostatică

Considerăm un condensator plan (fig. 1.26) cu armături de arie A situate în vid la distanța d, încărcate cu sarcinile $\pm q$. Fiind încărcate cu sarcini de semne opuse, aceste armături vor fi supuse acțiunii unor forțe de atracție. *Fiecare dintre aceste forțe rezultă din interacțiunea sarcinii electrice purtate de armătură cu cîmpul electric produs de armătura vecină.* De exemplu

$$\vec{F}_{e+} = q\vec{E}_-,$$

E_- fiind cîmpul produs de armătura negativă. Aşa cum am văzut (aplicaţia 2, subcapitolul B), o armătură plană încărcată cu sarcina $-q$ produce cîmpul

$$E_- = \frac{q}{2\varepsilon_0 A},$$

orientat ca în figura 1.17, *c*. Deci :

$$\boxed{F_{e+} = qE_- = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 A}} \qquad (1.29,\ a)$$

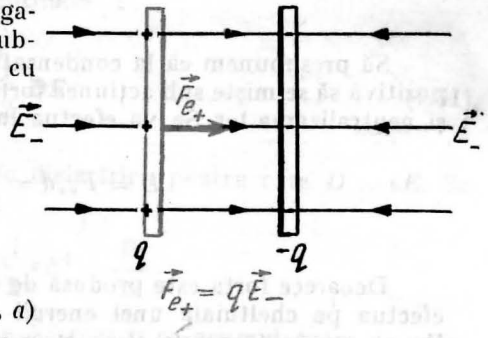


Fig. 1.26

La fel rezultă :

$$\boxed{F_{e-} = |-q|\,E_+ = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 A}} \qquad (1.29,\ b)$$

Se observă că *forţa nu depinde de distanţa dintre armături.*
Forţa pe unitatea de arie se numeşte *presiune electrostatică* şi are expresia :

$$p_e = \frac{F_e}{A} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 A^2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2,$$

deoarece $DA = q$ conform legii fluxului electric (v. aplicaţia 2, subcapitolul B).

Aplicaţia 1. *Să se calculeze presiunea electrostatică pentru* $E = 30$ kV/cm *în vid.*

$$p_e = 0{,}5 \times 8{,}85 \times 10^{-12} \left(\frac{3 \times 10^4}{10^{-2}}\right)^2 = 41 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Aplicaţia 2. *Să se calculeze forţa cu care este atrasă armătura unui condensator plan la presiunea* p_e *de mai sus, aria armăturii fiind* $A = 10$ m^2.

$$F_e = p_e A \cong 41 \times 10 = 410 \text{ N}.$$

Aplicaţia 3. *Armătura unui condensator plan de aria* $A = 2$ m^2 *este atrasă cu forţa de* $8{,}85$ *N. Ştiind că distanţa dintre armături este* $d = 1$ cm *şi că între ele este vid, să se afle ce tensiune trebuie aplicată între armături.*

$$F_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 A \Rightarrow E = \sqrt{\frac{2F_e}{\varepsilon_0 A}} = 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}};$$

$$U = Ed = 10^6 \times 10^{-2} = 10^4 \text{ V} = 10 \text{ kV}.$$

○ **Notă.** Acesta este *principiul electrometrului*, care prin măsurarea forţei măsoară tensiunea.

2. Energia electrostatică

Să presupunem că la condensatorul plan din figura 1.27 lăsăm armătura pozitivă să se miște sub acțiunea forței F_{e+} pînă la alipirea celor două armături și neutralizarea lor. Se va efectua lucrul mecanic :

$$L = F_{e+}d = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 A}d = \frac{1}{2}\frac{q^2}{\frac{\varepsilon_0 A}{d}}.$$

Deoarece forța este produsă de cîmpul electric, acest lucru mecanic se va efectua pe cheltuiala unei energii care trebuie atribuită cîmpului electric. Ea se numește *energie electrostatică* sau, mai general, *energie electrică*. Dacă W_e este valoarea inițială a acestei energii, cînd armăturile se găsesc la distanța d, valoarea ei finală va fi nulă deoarece prin alipirea armăturilor sarcinile se neutralizează și cîmpul electric se anulează. Aplicînd primul principiu al termodinamicii, vom putea scrie :

$$W_e^{in} - W_e^{fin} = L$$

(în acest proces nu se dezvoltă căldură). Deoarece $W_e^{in} = W_e$ și $W_e^{fin} = 0$, obținem

$$W_e = L = \frac{1}{2}\frac{q^2}{\frac{\varepsilon_0 A}{d}} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}.$$

(știm că $\frac{\varepsilon_0 A}{d} = C$ este capacitatea inițială a condensatorului).

Ținînd seama că $q = CU$, obținem următoarele expresii echivalente ale *energiei electrostatice acumulate în cîmpul electric al unui condensator.*

$$\boxed{W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}} \qquad (1.30)$$

Din aceste expresii rezultă că energia electrostatică a unui condensator crește odată cu creșterea sarcinii (deci a încărcării) acestuia. Energia electrostatică este acumulată între armături, adică în spațiul în care se află cîmpul.

Se numește *densitate de volum a energiei* energia acumulată în unitatea de volum :

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{qU}{2Ad}\left(\frac{\text{J}}{\text{m}^3}\right),$$

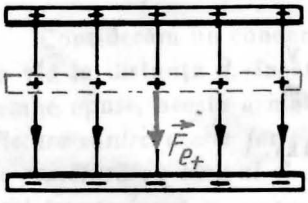


Fig. 1.27

Deoarece într-un condensator plan

$$D = \frac{q}{A} \text{ și } E = \frac{U}{d}$$

se poate scrie

$$w_e = \frac{1}{2} DE \tag{1.31}$$

Această expresie este valabilă și în dielectrici, pentru care $D = \varepsilon E$. Se mai obțin expresiile echivalente.

$$w_e = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon}$$

În electrotehnică condensatoarele se folosesc și ca acumulatoare de energie electrică, pe care o acumulează prin încărcare și o retrocedează prin descărcare.

Aplicația 1. *Să se calculeze energia electrostatică dintr-un condensator având* $C = 1\ \mu F$ *și* $U = 10\ kV$.

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2 = 0{,}5 \times 10^{-6} \times (10^4)^2 = 50\ \text{J}.$$

Aplicația 2. *Să se determine densitatea de volum a energiei electrostatice din condensatorul de mai sus, știind că dielectricul său are* $\varepsilon_r = 2{,}5$ *și* $d = 0{,}2\ mm$.

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 = 0{,}5 \times 2{,}5 \times 8{,}85 \times 10^{-12} \left(\frac{10^4}{0{,}2 \times 10^{-3}} \right)^2 = 2{,}77 \times 10^4 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}.$$

Aplicația 3. *Să se determine volumul de dielectric din condensatorul de mai sus.*

$$V = \frac{W_e}{w_e} = \frac{50}{2{,}77 \times 10^4} = 18{,}1 \times 10^{-4}\ \text{m}^3.$$

Aplicația 4. *Știind că rigiditatea dielectrică a izolației este* $E_d = 2\,500\ kV/cm$, *să se determine ce energie maximă poate fi stocată în condensatorul considerat.*

$$W_e \leq \frac{1}{2} CU_{str}^2 = \frac{1}{2} \times 10^{-6} \left(\frac{2\,500 \times 10^3}{10^{-2}} \right)^2 \times (0{,}2 \times 10^{-3})^2 = 1\,250\ \text{J}.$$

Probleme

1.1. Se consideră trei condensatoare de capacități $C_1 = 2\ \mu F$, $C_2 = 4\ \mu F$, $C_3 = 6\ \mu F$. Știind că tensiunea maximă pe care o poate suporta fiecare dintre ele este $U_{str} = 500$ V, se cere :

a) tensiunea maximă ce poate fi aplicată cînd sînt legate în serie ;

b) tensiunea maximă ce poate fi aplicată cînd sînt legate în paralel ;

c) sarcinile condensatoarelor, tensiunile la bornele lor și energiile acumulate în cazurile *a* și *b* ;

d) în cîte moduri distincte pot fi conectate cele trei condensatoare (serie, paralel și mixt) pentru a se obține capacități echivalente distincte ; care sînt valorile acestor capacități ?

1.2. În circuitul cu condensatoare din figura P.1.2 se dau $C_1 = C_3 = 4\ \mu F$, $C_2 = 6\ \mu F$, $C_4 = 1{,}6\ \mu F$ și sarcina $q_3 = 2\ \mu C$.

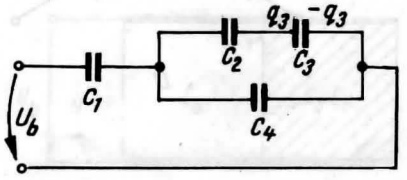


Fig. P. 1.2

Să se determine :

a) tensiunile și sarcinile tuturor condensatoarelor ;

b) tensiunea de alimentare U_b ;

c) capacitatea echivalentă ;

d) energia electrostatică totală și repartizarea ei pe condensatoare.

1.3. În circuitul din figura P.1.3 se cunosc $C_1 = 2\,\mu F$ și $C_2 = 1$ μF. Se cere să se calculeze :

a) capacitatea echivalentă ;

b) sarcinile, tensiunile și energiile condensatoarelor atunci cînd $U_b = 10$ kV.

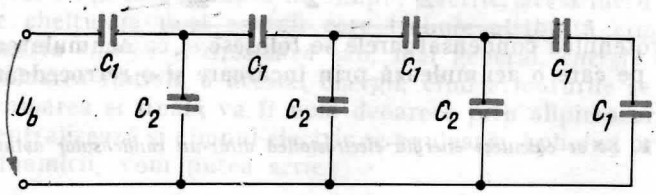


Fig. P. 1.3

1.4. Două condensatoare de capacități $C_1 = 10\,\mu$F și $C_2 = 20\,\mu$F se alimentează legate *în serie de la o sursă avînd* $U_b = 3\,000$ *V. După încărcare se deconectează de la sursă și încărcate fiind se leagă în paralel.*

a) Ce tensiune se va stabili la bornele lor legate în paralel ?

b) Ce sarcină vor avea în acest caz ?

c) Ce se întîmplă dacă după conectarea lor în paralel se mai adaugă, de asemenea în paralel, un condensator $C_3 = 20\,\mu$F neîncărcat ?

1.5. Se consideră circuitele în stea și triunghi formate din condensatoare cu capacități egale respectiv cu $C_\curlywedge$ și C_Δ (fig. P.1.5, *a*, *b*). Ce relație trebuie să existe între $C_\curlywedge$ și C_Δ pentru ca față de orice pereche de borne capacitatea echivalentă a stelei să fie egală cu capacitatea triunghiului ? Aplicație : $C_\curlywedge = 30\,\mu$F.

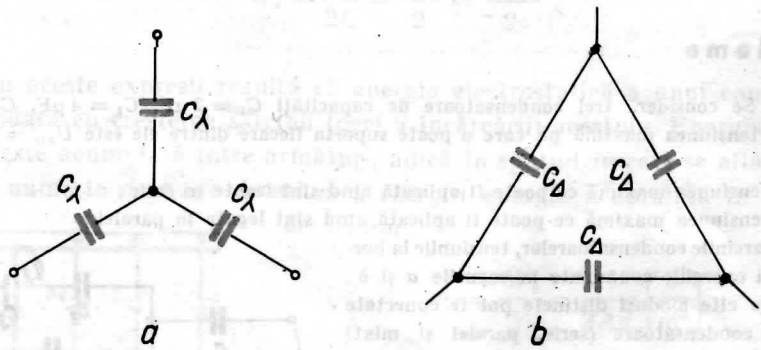


Fig.P. 1.5

1.6. Între armăturile unui condesator plan încărcat cu sarcina $q = 24\,\mu$C la tensiunea $U_b = 6$ V și decuplat de la sursă (fig. P.1.6, *a*) se introduce un dielectric cu grosimea egală cu jumă-

tate din distanța între armături. Cunoscînd distanța între armături $d = 6$ mm și permitivitatea relativă a dielectricului $\varepsilon_r = 4$ să se determine :

a) intensitatea cîmpului electric produs de sarcina q în starea inițială ;

b) intensitatea cîmpului electric după introducerea dielectricului și tensiunea U_b' dintre armături (fig. P.1.6, *b*) ;

c) capacitatea condensatorului după introducerea dielectricului. Să se argumenteze răspunsul.

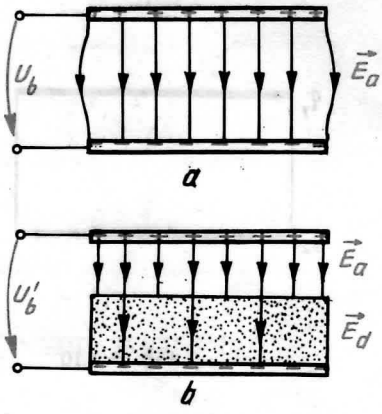


Fig. P. 1.6

1.7. Între armăturile unui condensator plan conectate la bornele unei surse cu t.e.m. de 6 V se introduce un bloc dielectric cu grosimea egală cu jumătate din distanța dintre armături (fig. P.1.7); condensatorul rămîne tot timpul cuplat la sursă. În starea inițială sarcina pe armături este de 24 μC. Cunoscînd distanța între armături d = 6 mm și permitivitatea relativă a dielectricului $\varepsilon_r = 4$ să se determine :

a) capacitatea condensatorului în starea inițială și intensitatea cîmpului electric între armături ;

b) intensitatea cîmpului electric după introducerea dielectricului și sarcina electrică pe armături ;

c) capacitatea condensatorului cu dielectric ; să se argumenteze răspunsul.

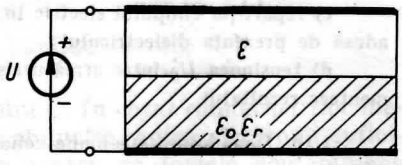


Fig. P. 1.7

1.8. Armăturile unui condensator plan cu capacitatea $C = 4$ μF sînt conectate la bornele unui generator cu t.e.m. $U_b = 6$ V. Condensatorul rămîne tot timpul cuplat la sursă. Între armături se introduce un dielectric de forma unui paralelipiped (fig. P.1.8) cu grosimea $d = 6$ mm egală cu distanța între armături, ce ocupă jumătate din volumul condensatorului. Se cere să se determine :

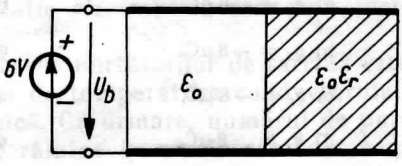


Fig. P. 1.8

a) sarcina electrică pe armăturile condensatorului în starea inițială ;

b) intensitatea cîmpului electric produs de această sarcină, în starea inițială și după introducerea dielectricului ;

c) repartiția sarcinii pe suprafața armăturii în starea inițială și după introducerea dielectricului ;

d) sarcina totală a armăturilor în prezența dielectricului ;

e) capacitatea echivalentă a condensatorului cu dielectric ; să se argumenteze rezultatul (permitivitatea relativă a dielectricului este $\varepsilon_r = 2$).

1.9. Armăturile unui condensator plan cu aria $A = 8$ cm² sînt încărcate cu sarcina $q = 24$ μC sub o tensiune $U_b = 6$ V ; condensatorul se decuplează apoi de la sursă. În spațiul dintre armături se introduce un dielectric ($\varepsilon_r = 4$) cu grosimea $d = 6$ mm, egală cu distanța între armăturile condensatorului (fig. P.1. 9) ce ocupă jumătate din volumul condensatorului. Se cere să se determine :

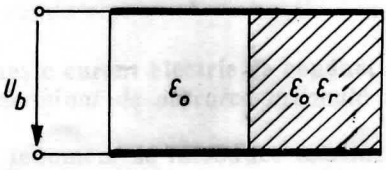


Fig. P. 1.9

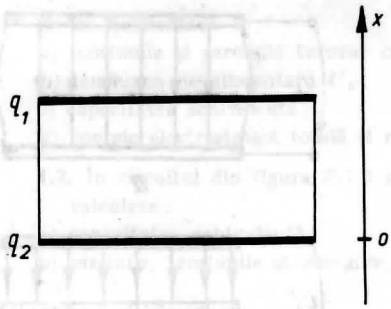


Fig. P. 1.10

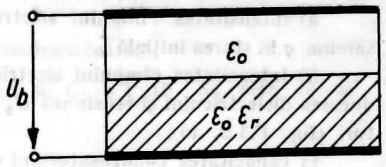


Fig. P. 1.11

a) densitatea superficială a sarcinii electrice pe armături ;

b) repartiția densității superficiale a sarcinii în prezența dielectricului ;

c) repartiția cîmpului electric în spațiul dintre armături în starea inițială și modificarea adusă de prezența dielectricului ;

d) tensiunea U_b' între armături și capacitatea condensatorului cu dielectric ; să se argumenteze rezultatul.

1.10. Două suprafețe plane conductoare, în formă de dreptunghi, cu laturile $a = 4$ cm și $b = 6$ cm și încărcate cu sarcinile q_1 și q_2 sînt plasate în aer ca în figura P.1.10.

Să se afle proiecția cîmpului electric pe axa ox și să se reprezinte grafic, pentru cazurile :

a) $q_1 = 6\ \mu C$, $q_2 = 8\ \mu C$;

b) $q_1 = -8\ \mu C$, $q_2 = 6\ \mu C$;

c) $q_1 = -8\ \mu C$, $q_2 = -6\ \mu C$;

d) $q_1 = 8\ \mu C$, $q_2 = -6\ \mu C$.

1.1. Între armăturile unui condensator plan cu aria $A = 48\ cm^2$ și distanța $d = 6$ mm se introduce un dielectric cu grosimea egală cu jumătate din distanța între armături (fig. P.1.11). Se cere să se determine :

a) capacitatea condensatorului cu dielectric dacă $\varepsilon_r = 2$;

b) tensiunea maximă ce se poate aplica între armături dacă rigiditatea dielectrică a substanței este $E_d = 400$ kV/cm (rigiditatea aerului este de 30 kV/cm) ;

c) sarcina electrică maximă cu care poate fi încărcat condensatorul.

Capitolul 2

ELECTROTEHNICA REGIMULUI ELECTROCINETIC STAȚIONAR

A. STAREA ELECTROCINETICĂ ȘI CARACTERIZAREA EI

1. Starea electrocinetică a conductoarelor

Așa cum am arătat în cap. 1, subcapitolul C, *în cazul conductoarelor metalice* purtătorii de sarcini sînt electronii de conducție, adică electronii suficient de depărtați de nucleele atomice fixe pentru ca forțele coulombiene exercitate de nuclee asupra lor să fie neglijabile.

În cazul conductoarelor electrolitice sau gazoase, purtătorii de sarcină sînt ionii pozitivi și negativi obținuți prin disociație electrolitică sau prin ionizarea moleculelor gazoase.

La echilibru termic și electrostatic, mișcarea purtătorilor de sarcină este dezordonată (sau haotică), fiind determinată de temperatura conductorului. Ea se mai numește mișcare de agitație termică. Ca urmare, numărul de purtători dintr-un anumit volum de conductor rămîne în medie constant, ca și sarcina pe care aceștia o poartă. Dacă conductorul este supus unor acțiuni externe care se manifestă prin forțe exercitate asupra purtătorilor de sarcină într-un sens bine determinat, aceștia capătă o mișcare ordonată (adică efectuată numai în anumite direcții și sensuri) care se suprapune peste mișcarea de agitație termică. Această mișcare ordonată a purtătorilor determină un transport de sarcină electrică. În aceste condiții se spune despre conductor că se află în *stare electrocinetică* sau că este parcurs de un curent electric de conducție.

2. Curentul electric de conducție. Intensitatea curentului electric de conducție

● Așa cum am precizat mai sus, se numește **curent electric de conducție** *fenomenul de transport al sarcinii electrice determinat de mișcarea ordonată a purtătorilor de sarcină.*

● Pentru a caracteriza cantitativ acest fenomen, se introduce mărimea fizică numită **intensitatea curentului electric de conducție,** care se notează cu *I*. Pentru definirea acestei mărimi considerăm un conductor rectiliniu

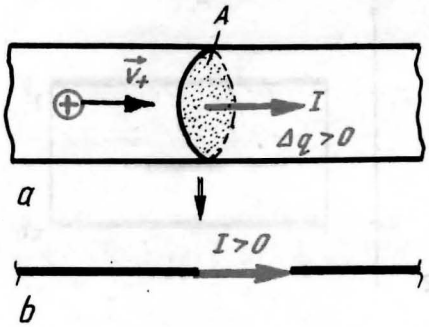


Fig. 2.1

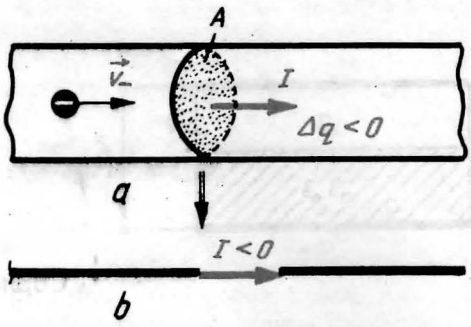


Fig. 2.2

și o secțiune transversală S prin acesta de arie A (fig. 2.1, *a*). Orice trecere a unui purtător de sarcină prin această secțiune reprezintă un transport de sarcină dintr-o parte în alta a secțiunii. Deoarece purtătorii se pot mișca în ambele sensuri, pentru a urmări sistematic fenomenul este necesar să ne alegem un sens de referință, pe care-l indicăm printr-o săgeată pe conductor. Acest sens se numește *sensul de referință al intensității curentului* și se indică în schemele circuitelor electrice ca în figura 2.1, *b*.

Orice purtător de sarcină care traversează secțiunea în sensul de referință determină o creștere a sarcinii în partea secțiunii indicată de sens dacă este pozitiv (fig. 2.1, *a*) și o scădere a sarcinii dacă este negativ (fig. 2.2, *a*). Dimpotrivă, orice purtător care traversează secțiunea în sens contrar sensului de referință determină o scădere a sarcinii dacă este pozitiv (fig. 2.3, *a*) și o creștere a ei dacă este negativ (fig. 2.4, *a*). În concluzie, din punctul de vedere al transportului de sarcină *mișcarea particulelor pozitive într-un sens este echivalentă cu mișcarea particulelor negative în sens contrar.*

Ne fixăm acum atenția asupra fenomenului de transport al sarcinii electrice în sensul de referință ales, între două momente de timp t_1 și t_2 care determină un interval $\Delta t = t_2 - t_1$. Fie Δq sarcina electrică (ca valoare și semn) care străbate în acest interval de timp, în sensul de referință considerat, secțiunea S (fig. 2.1).

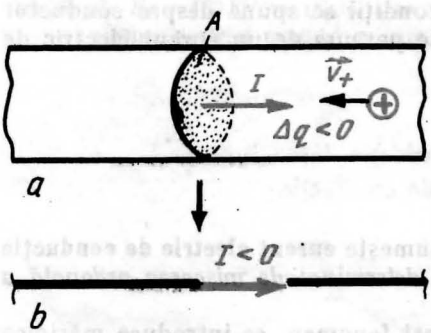


Fig. 2.3

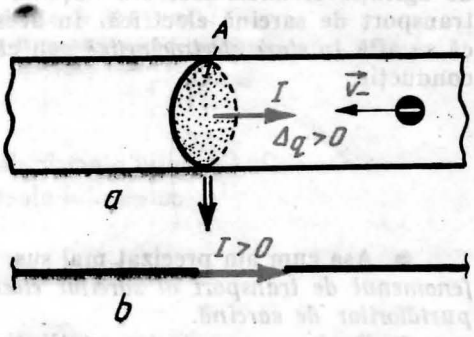


Fig. 2.4

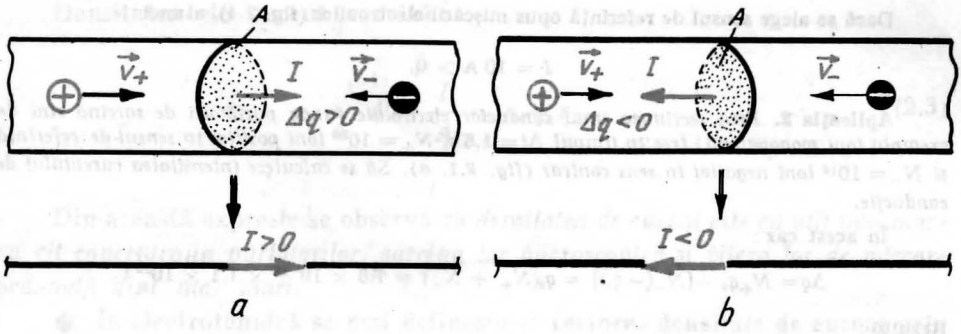


Fig. 2.5

Prin definiție se numește intensitate a curentului electric de conducție mărimea

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} \tag{2.1}$$

După cum se vede, **intensitatea curentului electric** nu este altceva decît *sarcina electrică transportată în unitatea de timp prin secțiunea S*, adică este *viteza de transport a sarcinii*. Deoarece Δq poate fi pozitivă sau negativă, iar Δt este pozitiv, rezultă că intensitatea curentului este de asemenea o mărime algebrică. Dacă se schimbă sensul de referință în opusul său (fig. 2.5), intensitatea curentului își schimbă semnul.

● **Unitatea de intensitate de curent** în sistemul SI se numește *amper* și are simbolul A. Din definiție rezultă :

$$1\,\mathrm{A} = \frac{1\,\mathrm{C}}{1\,\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{Cs}^{-1}.$$

În electrotehnică se mai utilizează multiplii și submultiplii următori :

megaamperul: 1 MA $= 10^6$ A ;
kiloamperul : 1 kA $= 10^3$ A ;
miliamperul : 1 mA $= 10^{-3}$ A ;
microamperul : 1 μA $= 10^{-6}$ A ;
picoamperul : 1 pA $= 10^{-12}$ A.

Aplicația 1. *Prin secțiunea unui conductor metalic (unde purtătorii de sarcină sînt numai electroni) trec în timpul $\Delta t = 1{,}6$ s, $N = 10^{20}$ electroni în sensul de referință (fig. 2.2). Să se calculeze intensitatea curentului electric de conducție.*

În acest caz :

$$\Delta q = -Nq_0 = -10^{20} \times 1{,}6 \times 10^{-19} = -16\,\mathrm{C}$$

și intensitatea curentului de conducție va fi :

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = -10\,\mathrm{A} < 0.$$

Dacă se alege sensul de referință opus mișcării electronilor (fig. 2.4), atunci:

$$I = 10\ \text{A} > 0.$$

Aplicația 2. *Prin secțiunea unui conductor electrolitic (unde purtătorii de sarcină sînt de exemplu ioni monovalenți) trec în timpul* $\Delta t = 1{,}6$ s, $N_+ = 10^{20}$ *ioni pozitivi în sensul de referință și* $N_- = 10^{19}$ *ioni negativi în sens contrar (fig. 2.1, a). Să se calculeze intensitatea curentului de conducție.*

În acest caz:

$$\Delta q = N_+ q_0 - [N_-(-q_0)] = q_0(N_+ + N_-) = 1{,}6 \times 10^{-19} \times 1{,}1 \times 10^{20}\ \text{C}.$$

Rezultă:

$$I = \frac{17{,}6}{1{,}6} = 11\ \text{A} > 0.$$

3. Densitatea curentului electric de conducție

● Se numește **densitate a curentului electric de conducție** *raportul dintre intensitatea curentului și aria secțiunii prin care trece acest curent:*

$$\boxed{J = \frac{I}{A}} \quad (I > 0). \tag{2.2}$$

Densitatea de curent este deci numeric egală cu intensitatea curentului care străbate unitatea de arie a secțiunii transversale.

Dacă presupunem că toți purtătorii de același semn au viteze ordonate egale, putem obține o expresie importantă a densității de curent. Considerăm un conductor cu purtători pozitivi care se mișcă în sensul de referință al intensității curentului cu viteza ordonată $\vec{v}_+$ (fig. 2.6). Fie q_+ sarcina lor și n_+ concentrația lor (adică numărul de purtători pe unitatea de volum). În aceste condiții, purtătorii care vor traversa secțiunea S de arie A a conductorului în intervalul de timp Δt (fig. 2.6) vor ocupa volumul:

$$\Delta V = A v_+ \Delta t.$$

Numărul lor va fi:

$$\Delta N = n_+ \Delta V = n_+ A v_+ \Delta t,$$

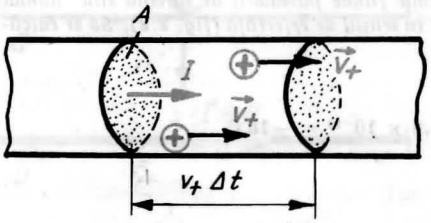


Fig. 2.6

iar sarcina pozitivă transportată în sensul de referință va fi:

$$\Delta q = q_+ n_+ A v_+ \Delta t.$$

Intensitatea curentului va fi:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q_+ n_+ A v_+ \Delta t}{\Delta t} = n_+ q_+ v_+ A.$$

Densitatea de curent rezultă :

$$J = \frac{I}{A} = n_+ q_+ v_+ \tag{2.3}$$

Din această expresie se observă că *densitatea de curent este cu atît mai mare cu cît concentrația purtătorilor, sarcina lor microscopică și viteza lor de mișcare ordonată sînt mai mari.*

● În electrotehnică se mai definește și **vectorul densitate de curent prin** relația :

$$\vec{J} = nq\vec{v} \tag{2.4}$$

Dacă purtătorii sînt pozitivi ($q = q_+ > 0$), atunci :

$$\vec{J} = n_+ q_+ \vec{v}_+$$

și este orientată în sensul vitezei de mișcare (fig. 2.7). Dacă purtătorii sînt negativi ($q = q_- < 0$), atunci :

$$\vec{J} = n_- q_- \vec{v}_-$$

și este orientat în sensul opus vitezei de mișcare (fig. 2.8). Dacă la producerea curentului participă purtători de ambele semne, atunci suprapunînd efectele se obține :

$$\vec{J} = n_+ q_+ \vec{v}_+ + n_- q_- \vec{v}_- \tag{2.5}$$

● **Unitatea de măsură a densității curentului electric.** Din definiție rezultă :

$$<J> = \frac{<I>}{<A>} = \frac{1\ \text{A}}{1\ \text{m}^2} = 1\ \text{Am}^{-2}$$

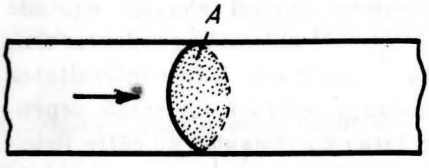


Fig. 2.7

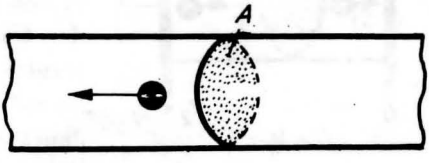


Fig. 2.8

În electrotehnică se folosește mai ales multiplul acestei unități, numit A/mm^2 :

$$1\ A/mm^2 = 10^6\ A/m^2.$$

Aplicația 1. *Știind că concentrația de electroni liberi dintr-un conductor de cupru este* $n = 10^{29}$ *electroni*$/m^3$, *se cere să se determine viteza de mișcare ordonată pentru o densitate de curent de* 10 A/mm^2.

$$J = n_- \mid q_- \mid v_- \Rightarrow v_- = \frac{J}{n \mid q \mid} = \frac{10 \times 10^6}{10^{29} \times 1{,}6 \times 10^{-19}} = 0{,}625\ \frac{mm}{s}.$$

Aplicația 2. *Știind că conductorul de cupru din aplicația 1 are temperatura de 20°C, să se determine viteza medie de agitație termică a electronilor liberi.*

Asimilînd comportarea electronilor cu aceea a moleculelor unui gaz perfect, energia cinetică medie este dată de :

$$\frac{m_e \tilde{v}^2}{2} = \frac{3}{2} kT \quad \left(k = 1{,}38 \times 10^{-23}\ \frac{J}{K},\ m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\ kg\right).$$

De aici :

$$\tilde{v} \cong \sqrt{\tilde{v}^2} = \sqrt{\frac{3\,kT}{m_e}} = 11{,}5 \times 10^4\ \frac{m}{s} = 0{,}115 \times 10^9\ \frac{mm}{s}.$$

○ **Observație.** *Viteza de agitație termică este de aproximativ* 10^9 *ori mai mare decît viteza în mișcarea ordonată.*

B. LEGILE ELECTROCINETICII

1. Legea lui Ohm

● **Legea lui Ohm.** Dintre toate forțele care pot imprima o mișcare ordonată purtătorilor de sarcină dintr-un conductor determinînd astfel apariția unui curent electric, cele mai importante și mai frecvent întîlnite sînt forțele electrice. Pentru a putea produce aceste forțe, este necesar să creăm un cîmp electric în cuprinsul conductorului. Acest lucru se realizează, de exemplu, introducînd conductorul între armăturile unui condensator, între care diferența de potențial se menține constantă (fig. 2.9). Se spune că în acest mod aplicăm conductorului o tensiune sau o diferență de potențial. Sub acțiunea cîmpului electric, în conductor apare un curent electric de intensitate I. Deoarece cîmpul electric depinde de tensiunea electrică aplicată conductorului, rezultă că există o legătură între intensitatea curentului și tensiunea aplicată. Această dependență a fost cercetată experimental de către fizicianul german *Georg Simon Ohm* și se numește legea lui Ohm. **Legea lui Ohm** poate fi enunțată

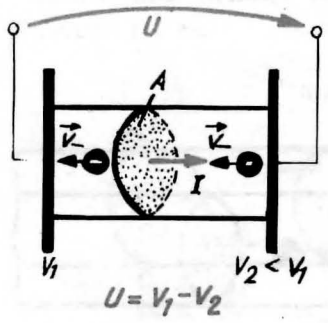


Fig. 2.9

astfel : *tensiunea electrică aplicată unui conductor este direct proporțională cu intensitatea curentului care-l străbate :*

$$U = RI \tag{2.6}$$

● **Rezistență și rezistivitate electrică.** Factorul de proporționalitate R depinde de natura și de dimensiunile conductorului și se numește *rezistență electrică.* Cercetările experimentale ale lui *Ohm* au arătat că rezistența electrică a unui conductor omogen de lungime l și cu secțiunea transversală constantă de aria A poate fi exprimată prin relația :

$$R = \rho \frac{l}{A} \tag{2.7}$$

care arată că rezistența electrică este direct proporțională cu lungimea conductorului și invers proporțională cu aria secțiunii sale transversale. Factorul de proporționalitate ρ se numește *rezistivitate electrică* și depinde de natura conductorului, adică are o valoare pentru cupru, alta pentru argint, alta pentru aluminiu etc.

● **Variația rezistivității cu temperatura.** Experiența arată că rezistivitatea conductoarelor metalice depinde de temperatură și de regulă crește odată cu temperatura. Pentru temperaturi nu prea mari (față de temperatura ambiantă) este valabilă următoarea lege de variație :

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha\theta) \tag{2.8}$$

sau :

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)],$$

unde ρ_0 este rezistivitatea la temperatura $T_0 = 273$ K, iar α este *coeficientul de variație a rezistivității cu temperatura.*

● **Conductanță și conductivitate electrică.** Legea lui Ohm mai poate fi scrisă și sub forma :

$$I = \frac{U}{R} = GU,$$

unde :

$$G = \frac{1}{R} = \frac{A}{\rho l} = \frac{\sigma A}{l} \tag{2.9}$$

se numește *conductanță electrică.*

Mărimea $\sigma = \dfrac{1}{\rho}$ se numește *conductivitate electrică.*

Din legea lui Ohm rezultă :

$$\langle R \rangle = \frac{\langle U \rangle}{\langle I \rangle},$$

adică

$$1 \text{ u. SI de rezistență} = \frac{1 \text{ V}}{1 \text{ A}} = 1 \ \Omega \text{ (ohm)}.$$

Din expresia rezistenței rezultă :

$$\langle \rho \rangle = \frac{\langle R \rangle \langle A \rangle}{\langle l \rangle},$$

adică :

$$1 \text{ unitate SI de rezistivitate} = \frac{1 \ \Omega \ 1 \text{ m}^2}{1 \text{ m}} = 1 \ \Omega\text{m}.$$

Unitatea de conductanță va fi :

$$1 \text{ unitate SI de conductanță} = \frac{1}{\Omega} = 1 \ \Omega^{-1} = 1 \text{ S (siemens)}.$$

Unitatea de conductivitate va fi :

$$1 \text{ unitate SI de conductivitate} = \frac{1}{1 \ \Omega \text{ m}} = 1 \ \Omega^{-1}\text{m}^{-1} = 1 \text{ S m}^{-1}.$$

În electrotehnică se folosesc frecvent și următorii multipli ai ohm-ului :
1 *kiloohm* = 1 kΩ = 10^3 Ω ;
1 *megohm* = 1 MΩ = 10^6 Ω.
Pentru rezistivitate se mai folosește unitatea :

$$1 \ \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} = 10^{-6} \ \Omega\text{m},$$

care este deosebit de comodă cînd se măsoară lungimea conductorului în metri, iar aria secțiunii sale în mm^2.

Aplicația 1. *Printr-un conductor avînd rezistența* $R = 10 \ \Omega$ *circulă un curent de intensitate* $I = 5$ *A. Să se afle tensiunea aplicată.*

$$U = RI = 10 \times 5 = 50 \text{ V}.$$

Aplicația 2. *Ce curent va străbate conductorul de mai sus dacă i se aplică tensiunea* $U = 500$ *V ?*

$$I = \frac{U}{R} = \frac{500}{10} = 50 \text{ A}.$$

Aplicația 3. *Știind că în aplicațiile precedente conductorul este din cupru cu* $\rho = 1{,}75 \times 10^{-8}\ \Omega m$, *să se afle lungimea sa dacă aria secțiunii lui este* $A = 1\ mm^2$.

$$R = \rho \frac{l}{A} \Rightarrow l = \frac{RA}{\rho} = 571\ \text{m}.$$

Aplicația 4. *Știind că rezistivitatea din aplicația 3 a fost dată pentru* $20°C$ *și că* $\alpha = 4 \times 10^{-3} \frac{1}{°C}$, *să se afle rezistivitatea cuprului la* $0°C$.

Din :

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha\theta) \Rightarrow \rho_0 = \frac{\rho}{1 + \alpha\theta} = \frac{1{,}75 \times 10^{-8}}{1 + 4 \times 10^{-3} \times 20} = 1{,}62 \times 10^{-8}\ \Omega\ \text{m}.$$

Aplicația 5. *Rezistența unui conductor de aluminiu la* $0°C$ *este* $R_0 = 10\ \Omega$. *Știind că prin încălzire rezistența lui a crescut la* $10{,}5\ \Omega$, *să se afle temperatura la care s-a încălzit.*

$$\alpha_{Al} = 4 \times 10^{-3} \frac{1}{°C};$$

$$R_0 = \rho_0 \frac{l}{A};$$

$$R_\theta = \rho_\theta \frac{l}{A} \Rightarrow \frac{R_0}{R_\theta} = \frac{\rho_0}{\rho_\theta}.$$

Deci :

$$\rho_\theta = \frac{R_\theta}{R_0} \cdot \rho_0 = \rho_0(1 + \alpha\theta);$$

$$\theta = \frac{\frac{R_\theta}{R_0} - 1}{\alpha} = \frac{\frac{10{,}5}{10} - 1}{4 \times 10^{-3}} = 12{,}5°\text{C};$$

$$T = 12{,}5 + 273 = 285{,}5\ \text{K}.$$

Pentru a înțelege mai bine legea lui Ohm, vom analiza aspectele microscopice ale apariției curentului electric. În adevăr, să considerăm un conductor rectiliniu cu secțiunea constantă de arie A și de lungime l, căruia i se aplică tensiunea U. Intensitatea cîmpului electric care se stabilește în conductor va fi (fig. 2.10) :

$$E = \frac{U}{l}.$$

Dacă q_m este sarcina unui purtător (pentru simplitate presupunem că există un singur tip de purtător, de sarcină $q_m < 0$), atunci asupra fiecărui purtător se va exercita forța electrică :

$$\vec{F}_e = q_m \vec{E};$$

ca urmare, toți purtătorii vor căpăta o mișcare ordonată în sensul forței $\vec{F}_e$.

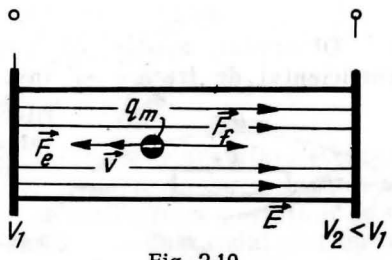


Fig. 2.10

Dacă mişcarea s-ar desfăşura fără obstacole, purtătorii ar fi uniform accelerați, iar viteza lor ordonată ar creşte mereu. În realitate, purtătorii se mişcă prin interstiţiile reţelei ionice a conductorului şi, datorită agitaţiei termice, se ciocnesc frecvent de aceşti ioni pierzîndu-şi mişcarea ordonată. Acest mecanism foarte complicat poate fi asimilat cu o forţă de frecare vîscoasă (adică dependentă de viteză) care se opune accelerării nelimitate a purtătorilor. Ca urmare, putem presupune că asupra fiecărui purtător se exercită, în afară de forţa electrică $\vec{F}_e$, şi o forţă de frecare $\vec{F}_f$ opusă vitezei ordonate $\vec{v}$. Atunci cînd forţa de frecare echilibrează forţa electrică

$$\vec{F}_e + \vec{F}_f = 0,$$

purtătorii continuă să se mişte ordonat uniform. Forţa de frecare fiind opusă vitezei, se poate exprima astfel :

$$\vec{F}_f = -k_f\vec{v},$$

unde k_f este un coeficient de frecare. Din relaţia de echilibru al forţelor rezultă :

$$\vec{F}_e = -\vec{F}_f = k_f\vec{v}$$

sau

$$|q_m|E = k_f v.$$

Înmulţind şi împărţind membrul drept al acestei egalităţi cu $n|q_m|$, obţinem :

$$E = \frac{k_f}{nq_m^2} \cdot nq_m v = \frac{k_f}{nq_m^2} J = \frac{k_f}{nq_m^2} \cdot \frac{I}{A}.$$

Înmulţind această relaţie cu l (lungimea conductorului), obţinem :

$$U = El = \frac{k_f}{nq_m^2} \cdot \frac{l}{A} \cdot I.$$

Dar conform legii lui Ohm, $U = RI$, deci coeficientul de proporţionalitate între tensiune şi curent este :

$$R = \frac{k_f}{nq_m^2} \cdot \frac{l}{A} = \rho \frac{l}{A}$$

cu

$$\rho = \frac{k_f}{nq_m^2}.$$

Observăm aşadar că rezistivitatea este direct proporţională cu coeficientul de frecare şi invers proporţională cu concentraţia purtătorilor şi cu pătratul sarcinii electrice ; rezistivitatea nu depinde deci de semnul sarcinii purtătorilor.

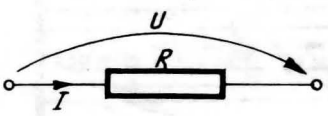


Fig. 2.11

În circuitele electrice, conductoarele care au o rezistenţă R şi la bornele cărora se aplică tensiunea U se reprezintă ca în figura 2.11.

4. Legea lui Joule

Experiența arată că un conductor parcurs de curent se încălzește (fenomenul se numește *efect Joule*). Fizicianul englez *James Joule* a arătat că *prin trecerea unui curent electric de intensitate I printr-un conductor electric de rezistență R, într-un interval de timp* Δt, *se dezvoltă o cantitate de căldură*

$$Q_{\Delta t} = RI^2\Delta t. \tag{2.10}$$

Aceasta este **legea lui Joule.**

Căldura dezvoltată în unitatea de timp, care se mai numește și *putere Joule*, va fi :

$$P_J = \frac{Q_{\Delta t}}{\Delta t} = RI^2 \tag{2.11}$$

Deoarece conform legii lui Ohm $U = RI$ și $I = GU$, puterea Joule se mai poate exprima și astfel :

$$P_J = RI^2 = (RI)I = UI = R\left(\frac{U}{R}\right)^2 = \frac{U^2}{R} = GU^2.$$

Unitatea SI de putere este *wattul* (1 W) :

$$1\ \text{W} = 1\ \Omega \cdot 1\ \text{A}^2.$$

Aplicația 1. *Care este căldura degajată în unitatea de timp de un conductor cu rezistența* $R = 10\ \Omega$ *parcurs de un curent cu intensitatea de 5 A ?*

$$P_J = RI^2 = 10 \times 5^2 = 250\ \text{W}.$$

Aplicația 2. *Ce rezistență are un bec de 100 W alimentat la 220 V ?*

$$P_J = \frac{U^2}{R};\quad R = \frac{U^2}{P_J} = \frac{220^2}{100} = 484\ \Omega.$$

Aplicația 3. *Ce căldură degajă în timp de 24 ore un radiator funcționînd la tensiunea de 220 V, dacă absoarbe un curent I = 5 A ?*

$$Q_{\Delta t} = RI^2\Delta t = UI\Delta t = 220 \times 5 \times 24 \times 3\,600 = 9{,}5 \times 10^7\ \text{J};$$

$$Q_{\Delta t} = 95\,000\ \text{kJ}.$$

Aplicația 4. *Știind că 1 kilowattoră (1 kWh) este căldura dezvoltată într-o oră de un conductor care la tensiunea de 1 kV absoarbe 1 A, să se afle această căldură, exprimată în joule.*

$$Q_{\Delta t} = UI\Delta t = 10^3 \times 1 \times 3\,600 = 3{,}6 \times 10^6\ J = 1\ \text{kWh}.$$

5. Interpretarea microscopică a legii lui Joule

Din punct de vedere microscopic, orice creștere de temperatură este rezultatul intensificării agitației termice a particulelor microscopice ale substanței.

Așa cum am arătat în subcapitolul B.3, ciocnirile între purtătorii de sarcină aflați în mișcare ordonată și rețeaua ionică a conductorului sînt inevita-

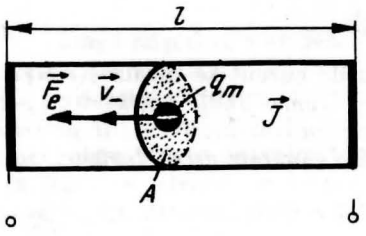


Fig. 2.12

bile. Purtătorii de sarcină care suferă ciocniri îşi pierd mişcarea ordonată, respectiv componenta vitezei în mişcarea ordonată se anulează. Energia cinetică corespunzătoare mişcării ordonate este transferată mişcării termice. Deoarece mişcarea ordonată este determinată de forţele electrice, pînă la urmă lucrul mecanic al acestor forţe se regăseşte în creşterea energiei de agitaţie termică a particulelor substanţei, care se manifestă prin creşterea de temperatură.

În adevăr, puterea mecanică a forţelor electrice dintr-un conductor de lungime l şi cu secţiunea de arie A (fig. 2.12) este :

$$P_{mec} = (nF_e v)Al = n(|\, q_m \,|\, Ev)Al,$$

unde :

$|\, q_m \,|\, Ev$ este puterea pentru un singur purtător ;

n — concentraţia purtătorilor ;

Al — volumul conductorului.

Aranjînd altfel ordinea factorilor, mai scriem şi

$$P_{mec} = (n \,|\, q_m \,|\, v)A(El) = JAU = IU.$$

Deoarece $U = RI$, obţinem :

$$P_{mec} = RI^2 = P_J.$$

Efectul Joule deci nu este altceva decît *transformarea lucrului mecanic efectuat de cîmpul electric asupra purtătorilor de sarcină în energie de agitaţie termică.*

Considerăm un conductor închis pe care îl introducem într-un cîmp electric. Constatăm că în conductor nu va apărea curent şi nici o transformare de energie. În adevăr, aşa cum am văzut la regimul electrostatic, lucrul mecanic al forţelor electrice pe orice drum închis este nul şi deci mişcarea purtătorilor de sarcină numai sub acţiunea forţelor electrice pe drumuri închise nu este posibilă.

Experienţa arată că printr-un circuit închis poate circula curent electric numai dacă, pe lîngă forţele electrice asupra purtătorilor de sarcină acţionează forţe de altă natură (neelectrică), care pot efectua lucru mecanic nenul pe drumuri închise (se numesc *forţe neconservative*).

Se numeşte **generator electric** sau **sursă electrică** *orice ansamblu de conductoare în care asupra purtătorilor de sarcină se exercită forţe neelectrice capabile să efectueze un lucru mecanic.*

a. *Generatorul în gol și tensiunea electromotoare a sursei*

Să ne imaginăm o porțiune de conductor (deschisă) în care, pe lîngă forța electrică $\vec{F}_e$, asupra purtătorilor de sarcină acționează și forța neelectrică $\vec{F}_{ne}$. Să presupunem un moment inițial în care cîmpul electric este nul și asupra purtătorilor (presupuși pozitivi) acționează numai forțele neelectrice. Sub acțiunea acestor forțe, purtătorii de sarcină vor fi aglomerați la unul dintre capetele conductorului (fig. 2.13), care se va încărca astfel pozitiv ; celălalt capăt, avînd lipsă de purtători, se va încărca negativ. Această separare de sarcină va produce însă un cîmp electric orientat dinspre sarcinile pozitive spre cele negative. El va produce forțe electrice $\vec{F}_e$ orientate în sens invers față de forțele $\vec{F}_{ne}$, care vor acționa asupra purtătorilor. Procesul de separare a sarcinilor încetează în momentul în care forțele electrice echilibrează forțele neelectrice. Ecuația de echilibru al forțelor se scrie :

$$\vec{F}_e + \vec{F}_{ne} = 0$$

sau, scalar :

$$F_e = F_{ne}.$$

Deoarece $F_e = q_m E \neq 0$, observăm că în conductor se stabilește un cîmp electric chiar cînd purtătorii nu se mișcă ordonat și deci nu există curent electric, deci cînd generatorul „funcționează în gol".

Existînd cîmp electric, între capetele conductorului apare o diferență de potențial

$$V_A - V_B = El = \frac{F_e}{q_m} l = \frac{F_{ne}}{q_m} l = E_i l$$

Mărimea

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}_{ne}}{q_m} \tag{2.12}$$

se numește *cîmp electric imprimat*, iar produsul :

$$E_i l = e \tag{2.13}$$

se numește *tensiune electromotoare (t.e.m.) imprimată* sau *tensiune electromotoare a sursei*.

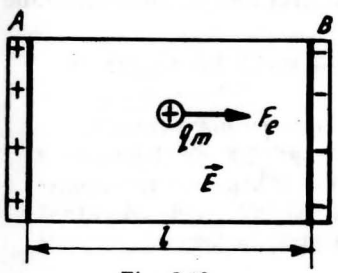


Fig. 2.13

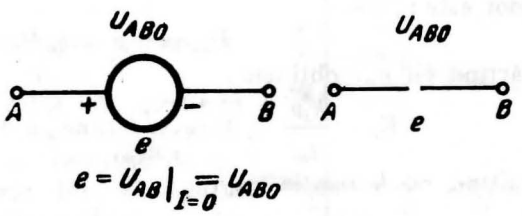


Fig. 2.14

Deoarece diferența de potențial $V_A - V_B$ este egală și cu tensiunea U_{AB} din lungul conductorului cînd curentul este nul, folosind notația:

$$V_A - V_B = U_{AB}|_{I=0} = U_{ABO}$$

putem scrie:

$$\boxed{e = U_{ABO}}$$

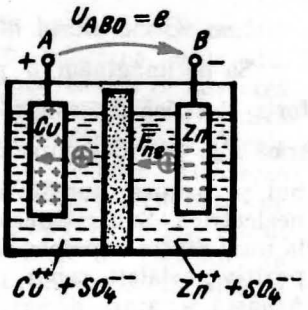


Fig. 2.15

Rezultă așadar că *t.e.m. a unei surse este egală cu tensiunea electrică* (diferența de potențial) *de mers în gol.*

În schemele electrice, generatoarele se reprezintă ca în figura 2.14, t.e.m. fiind orientată în sensul forțelor neelectrice, adică dinspre minus spre plus, iar tensiunea U_{AB} — în sensul forțelor electrice, adică de la plus la minus.

Cele mai vechi și mai cunoscute surse de t.e.m. sînt sursele electrochimice (pilele electrice), în care forțele neelectrice se manifestă pe suprafața de contact dintre electrozi și electrolit (fig. 2.15). Particulele încărcate pozitiv asupra cărora se exercită forțele neelectrice sînt ionii de cupru și de zinc: Cu^{++} și, respectiv, Z^{++}.

b. *Generatorul în sarcină*

Dacă între bornele unui generator se conectează un conductor, se formează un circuit închis, iar forțele neelectrice fac ca purtătorii de sarcină să aibă, pe traiectorii închise, o mișcare continuă (fig. 2.16). Pentru purtătorii aflați în generator, mișcarea este determinată de acțiunea simultană a forțelor neelectrice, electrice și a forțelor de frecare. Mișcarea purtătorilor în conductorul exterior este determinată de forța de natură electrică și de cea de frecare.

În mișcare staționară (cînd purtătorii au viteze constante)forțele sînt în echilibru:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_{ne} + \vec{F}_f = 0$$

pentru purtătorii din generator;

$$\vec{F}_e + \vec{F}_f = 0$$

pentru cei din conductorul exterior.

Purtătorii se mișcă în sensul forței neelectrice și deci relația între mărimile forțelor este:

$$F_{ne} = k_f v + q_m E.$$

Împărțind cu q_m, obținem:

$$E_i = \frac{k_f v}{q_m} + E = \frac{k_f}{nq_m^2} \cdot nq_m v + E = \rho \frac{I}{A} + E.$$

Înmulțind cu l, relația devine:

$$E_i l = \rho \frac{l}{A} I + El.$$

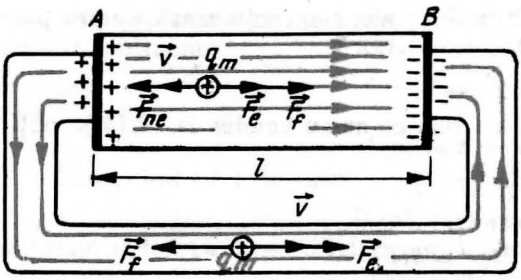


Fig. 2.16

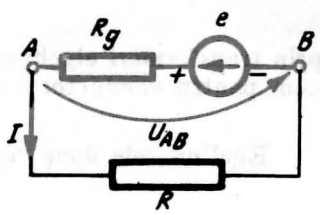


Fig. 2.17

Dar : $El = U_{AB}$, $E_i l = e$ și $\frac{\rho l}{A} = R_g$ (rezistența internă a generatorului) și obținem :

$$\boxed{e = R_g I + U_{AB}} \tag{2.14}$$

Aceasta este *ecuația generatorului în sarcină.*

Circuitul echivalent este prezentat în figura 2.17.

Dacă $I = 0$, se obține așa cum am văzut,

$$e = U_{AB0}.$$

Relația (2.14) se mai poate scrie :

$$\boxed{U_{AB} = e - R_g I.} \tag{2.14'}$$

Ea arată că *tensiunea la bornele generatorului este mai mică decît t.e.m., scăzînd pe măsură ce intensitatea curentului crește* (fig. 2.18). Mărimea $R_g I$ care se scade din t.e.m. se numește *cădere de tensiune internă a generatorului.*

Explicitînd relația (2.14) în raport cu curentul obținem :

$$\boxed{I = \frac{e - U_{AB}}{R_g},}$$

de unde se vede că valoarea maximă a curentului este aceea la care se anulează tensiunea la borne. Acest lucru se poate realiza legînd bornele A și B între ele (punîndu-le în scurtcircuit). Intensitatea curentului care rezultă se numește *curent de scurtcircuit* și se notează cu I_{sc} :

$$e = R_g I_{sc} \Rightarrow \boxed{I_{sc} = \frac{e}{R_g}} \tag{2.15}$$

c. *Legea lui Ohm în circuite cu generator*

Considerăm un generator (fig. 2.17) de t.e.m. e și cu rezistența internă R_g, care alimentează un conductor (pe care îl vom numi *receptor*) de rezistență R. Fie A, B bornele lor de legătură. Pentru generator putem scrie ecuația :

$$U_{AB} = e - R_g I.$$

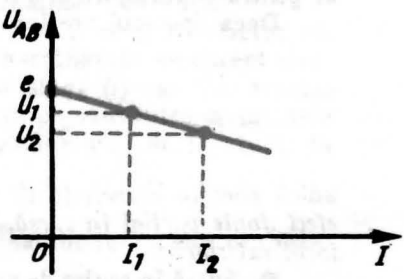


Fig. 2.18

Pornind de la ecuația de echilibru al forțelor care acționează asupra purtătorilor în mișcare prin conductorul exterior:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_f = 0,$$

prin transformări algebrice similare cu cele ce ne-au condus la (2.14'), obținem pentru conductorul receptor:

$$U_{AB} = RI.$$

Egalînd cele două relații obținem:

$$e - R_g I = RI$$

sau

$$I = \frac{e}{R + R_g} \tag{2.16}$$

Această relație se mai numește și *legea lui Ohm pentru un circuit închis cu sursă de t.e.m. și receptor exterior.*

În cazul generatorului în gol neexistînd curent, nu există transformare de energie. *Un generator în gol este un sistem de conductoare în stare de echilibru electrostatic.*

● **Sursa în regim de generator.** Scriind ecuația unui generator în sarcină:

$$e = RI + R_g I$$

și înmulțind cu I, obținem o relație între puteri:

$$eI = RI^2 + R_g I^2 = P_J + P_{Jg}.$$

Se observă că puterea Joule dezvoltată în conductor și în generator este acoperită de termenul eI. De aceea:

$$eI = P_g \tag{2.17}$$

trebuie considerată ca *putere dezvoltată de generator.* Ea se datorează lucrului mecanic efectuat de forțele neelectrice, deoarece ele determină apariția t.e.m. a generatorului.

Cum lucrul mecanic al forțelor neelectrice se efectuează pe seama cheltuirii unei energii neelectrice (de exemplu chimice), spunem că *o sursă în regim de generator transformă energia sa internă (neelectrică) în energie electrică.*

Dacă procesul are loc într-un interval de timp Δt, obținem:

$$eI\Delta t = P_J \Delta t + P_{Jg}\Delta t$$

sau

$$\Delta W_g = \Delta W_J + \Delta W_{Jg} \tag{2.18}$$

adică *energia dezvoltată de sursă în timpul Δt se transformă în căldură prin efect Joule parțial în sursă, datorită rezistenței ei interne, și parțial în conductorul exterior.*

● **Sursă în regim de acumulator.** Dacă unei surse i se aplică din exterior o tensiune la borne mai mare decît tensiunea sa la mers în gol, atunci curentul

va circula în sens contrar t.e.m. Schimbînd în ecuaţia $e = U_{AB} + R_g I$ pe I cu $-I$, obţinem :

$$e = U_{AB} - R_g I$$

sau

$$U_{AB} = e + R_g I.$$

Înmulţind cu I obţinem o relaţie între puteri :

$$U_{AB} I = eI + R_g I^2$$

şi înmulţind şi cu Δt — o relaţie între energii :

$$U_{AB} I \Delta t = eI\Delta t + R_g I^2 \Delta t,$$

adică

$$\Delta W_{AB} = \Delta W_g + \Delta W_{Jg} \tag{2.19}$$

În acest caz *sursa primeşte din exterior energia electrică* ΔW_{AB} (pe la borne), *din care o parte o transformă în energie internă neelectrică (o acumulează), iar restul o transformă în căldură prin efect Joule.*

○ **Observaţie.** Un astfel de proces se numeşte „încărcare" şi este posibil numai la anumite surse, care se numesc *acumulatoare.* Spunem că în acest caz *încărcăm acumulatorul.*

○ **De reţinut !** *Subliniem că ori de cîte ori t.e.m. şi intensitatea curentului au acelaşi sens, generatorul cedează energie electrică şi ori de cîte ori sînt de sensuri opuse, generatorul primeşte energie electrică.*

● Un sistem de corpuri se consideră izolat din punct de vedere electric dacă în jurul său se poate delimita o suprafaţă închisă prin care nu trece curent electric. Experienţa arată că sarcina electrică totală a unui astfel de sistem este invariabilă în timp. Acest rezultat constituie **legea conservării sarcinii electrice** şi se enunţă astfel : *sarcina electrică a unui sistem izolat de corpuri este constantă* :

$$q_\Sigma = const \tag{2.20}$$

Conservarea sarcinii electrice este o consecinţă a faptului că particulele elementare care intră în constituţia atomilor au sarcina constantă şi invariabilă, egală cu un multiplu al sarcinii elementare $q_0 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. Deoarece un sistem de corpuri este izolat atunci cînd nu pierde şi nici nu cîştigă electroni sau ioni, rezultă evident că sarcina sa rămîne constantă.

● **Forma generală a legii conservării sarcinii.** Un corp conductor nu este izolat dacă există o suprafaţă care-l înconjoară străbătută de curent electric (fig. 2.19). Fie I_Σ intensitatea acestui curent şi $q_\Sigma(t)$ sarcina acestui conductor la momentul t. Într-un interval de timp Δt cuprins între momentele t şi $t + \Delta t$, datorită circulaţiei curentului prin conductorul de legătură, la exteriorul suprafeţei se va scurge sarcina :

$$\Delta q = I_\Sigma \Delta t.$$

Ca urmare, a acestei pierderi de sarcină, sarcina conductorului din interiorul suprafeţei Σ va scădea, astfel încît :

$$q_\Sigma(t + \Delta t) = q_\Sigma(t) - \Delta q.$$

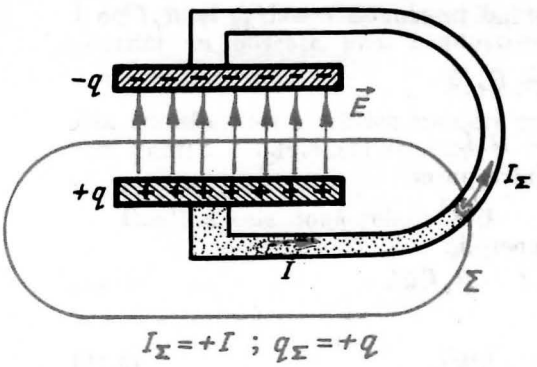


Fig. 2.19

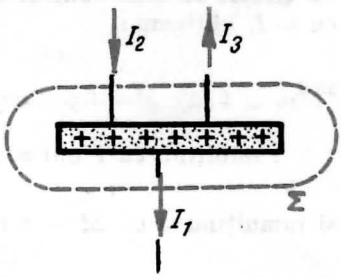


Fig. 2.20

Notînd cu :

$$\Delta q_\Sigma = q_\Sigma(t + \Delta t) - q_\Sigma(t)$$

variaţia sarcinii din interiorul suprafeţei, obţinem :

$$\Delta q_\Sigma = -\Delta q = -I_\Sigma \Delta t.$$

De aici rezultă :

$$\boxed{I_\Sigma = -\frac{\Delta q_\Sigma}{\Delta t}} \qquad (2.21)$$

care constituie **expresia cea mai generală a legii conservării sarcinii** şi se enunţă astfel : *viteza de scădere a sarcinii electrice q_Σ din interiorul unei suprafeţe Σ este egală cu intensitatea totală I_Σ a curentului electric care iese din suprafaţă.*

○ **Notă.** În general, prin I_Σ trebuie să înţelegem suma algebrică a curenţilor care străbat suprafaţa Σ (pozitivi cînd ies şi negativi cînd intră).

Aplicaţia 1. *Un corp conductor avînd la momentul t sarcina $q = 100\mu C$ este legat cu alte corpuri prin trei conductoare prin care circulă curenţii $I_1 = 1$ A, $I_2 = 2$ A şi $I_3 = 5$ A cu sensurile din figura 2.20. Care va fi sarcina electrică a corpului după 5 μs.*

Scriem :

$$I_\Sigma = I_1 - I_2 + I_3 = 4\text{ A}\,;\ \Delta t = 5 \times 10^{-6}\text{ s}\,;$$

$$\Delta q_\Sigma = -I_\Sigma \Delta t = -4 \times 5 \times 10^{-6} = -20\,\mu\text{C}.$$

Deci :

$$q_\Sigma(t + \Delta t) = q_\Sigma(t) + \Delta q_\Sigma = 100\,\mu\text{C} - 20\,\mu\text{C} = 80\,\mu\text{C}.$$

Aplicaţia 2. *Armăturile unui condensator încărcat iniţial cu sarcinile $\pm q = \pm 50\mu C$ se leagă între ele printr-un conductor (v. fig. 2.19). Să se determine intensitatea curentului din conductor ştiind că în primele 2 μs de la efectuarea legăturii armăturile se descarcă cu 1% din sarcina iniţială.*

Înconjurînd armătura pozitivă cu o suprafaţă Σ, putem scrie :

$$I_\Sigma = -\frac{\Delta q_\Sigma}{\Delta t} = -\frac{\dfrac{-50}{100}\,\mu\text{C}}{2\mu\text{s}} = 0{,}25\text{ A} = 250\text{ mA}.$$

Capitolul 3

ELECTROTEHNICA CIRCUITELOR DE CURENT CONTINUU

A. ELEMENTE DE CIRCUIT

1. Caracterizarea elementelor de circuit

Prin **circuite electrice de curent continuu** înțelegem *circuitele în care curenții și tensiunile au valori invariabile în timp*. De regulă, aceste mărimi se notează cu litere mari : I, E*, U etc.

Componentele unui circuit electric se numesc **elemente de circuit.** De exemplu, circuitul simplu de curent continuu cuprinzînd o sursă cu t.e.m. E și rezistența internă R_i, care alimentează un rezistor avînd rezistența R (fig. 3.1), are două elemente : sursa și rezistorul.

Elementele de circuit cu două borne (terminale) de acces se numesc **elemente dipolare.**

Atunci *cînd un element dipolar poate fi caracterizat printr-o singură mărime,* el se numește **element ideal de circuit** (de exemplu, rezistorul ideal este caracterizat numai de rezistența sa, R).

● **Elemente de circuit pasive și active.** Un *element de circuit* de curent continuu se numește *pasiv* dacă nu poate ceda energie electrică în circuit oricare ar fi sensul curentului prin element (de regulă, un astfel de element absoarbe energie electrică). Rezistorul este un element pasiv de circuit.

Un *element de circuit* se numește *activ* dacă poate genera energie de natură electrică în anumite regimuri de funcționare (în alte regimuri de funcționare, un astfel de element poate, eventual, primi energie electrică, fiind un receptor de energie). Sursele sînt elemente active de circuit.

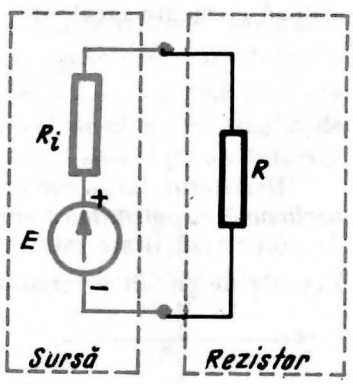


Fig. 3.1

* *În regim electrostatic* s-a utilizat notația E pentru intensitatea cîmpului electric.

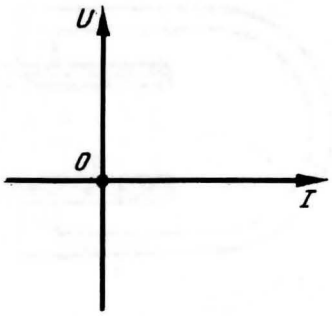


Fig. 3.2

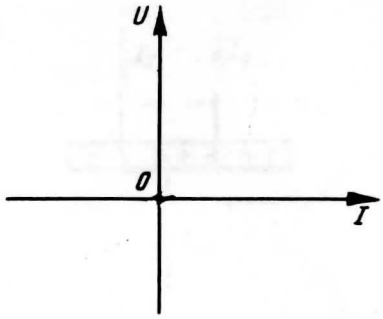


Fig. 3.3

Un circuit electric format numai din elemente pasive se numeşte *circuit pasiv.* Un circuit electric care pe lîngă elemente pasive are cel puţin un element activ se numeşte *circuit activ.*

● Un element dipolar de circuit este complet caracterizat prin relaţia între tensiunea U la borne şi intensitatea I a curentului prin element. Graficul acestei relaţii într-un plan de coordonate $U—I$ se numeşte **caracteristică tensiune-curent a elementului de circuit.** *Elementele de circuit* se numesc *liniare* dacă caracteristica tensiune-curent este o dreaptă (fig. 3.2). *Elementele de circuit* se numesc *neliniare* cînd caracteristica tensiune-curent este o curbă (fig. 3.3).

Elementele reale de circuit sînt, de regulă, neliniare, dar multe dintre ele pot fi considerate în limite suficient de largi ale curentului şi tensiunii ca fiind liniare.

Teoria simplificată a circuitelor electrice de c.c. se referă la circuite alcătuite din elemente ideale de circuit: rezistorul ideal şi sursa ideală. Utilitatea elementelor de circuit ideale constă în faptul că permit o formulare simplă a teoriei circuitelor, iar comportarea oricărui element real de circuit poate fi descrisă (modelată) printr-o schemă echivalentă alcătuită numai din elemente ideale. De aceea vom începe studiul circuitelor de c.c. cu studiul a două elemente ideale de circuit.

Rezistorul ideal *este elementul de circuit care are tensiunea la borne proporţională cu intensitatea curentului, oricare ar fi valoarea curentului.* Factorul de proporţionalitate este rezistenţa R a rezistorului.

Ecuaţia de circuit a rezistorului este:

$$U = RI \quad \text{pentru orice } I$$

Conductanţa G a unui rezistor este mărimea inversă rezistenţei:

$$G = \frac{1}{R}.$$

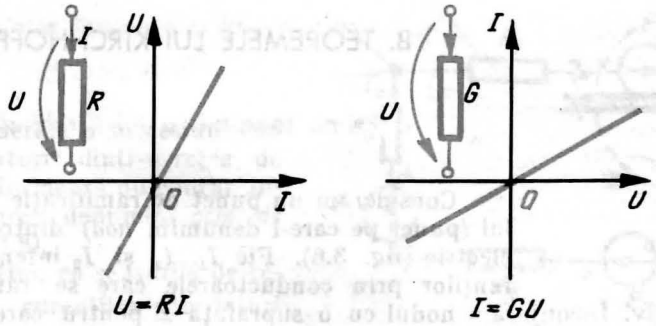


Fig. 3.4

Simbolul grafic al rezistorului ideal şi caracteristica tensiune-curent (o dreaptă care trece prin originea axelor) sînt prezentate în figura 3.4.

Rezistorul ideal este un element pasiv : puterea $P_R = UI = RI^2 = GU^2 = \frac{U^2}{R}$ este totdeauna pozitivă, fiind efectiv primită pe la borne. Rezistorul ideal *nu funcţionează decît ca receptor de energie electrică*. Puterea primită pe la borne se regăseşte sub formă de căldură dezvoltată în unitatea de timp, prin efect Joule.

3. Sursa ideală de tensiune

Sursa ideală de tensiune *este un element de circuit care are tensiunea la borne independentă de curentul care trece prin sursă.*

Caracteristica $U—I$ a sursei ideale de tensiune se exprimă prin relaţia :

$$\boxed{U = E,} \text{ pentru orice } I.$$

Simbolul grafic şi caracteristica $U—I$ sînt reprezentate în figurile 3.5, *a* şi *b*.

În raport cu sensurile precizate, sursa funcţionează în regim de generator cînd curentul prin sursă este pozitiv şi în regim de receptor cînd curentul prin sursă este negativ. Puterea la bornele sursei, $P_b = UI = EI$, este pozitivă în primul caz (regim de generator) şi negativă în cel de-al doilea (regim de receptor). Energia electrică schimbată de sursă prin borne într-un interval de timp $(t, t + \Delta t)$ este $\Delta W = P_b \Delta t$. Energia electrică este pozitivă ($\Delta W > 0$) cînd este efectiv cedată de sursă şi negativă cînd este efectiv primită de sursă.

Intensitatea I a curentului prin sursă este dependentă de elementele de circuit conectate la bornele sale.

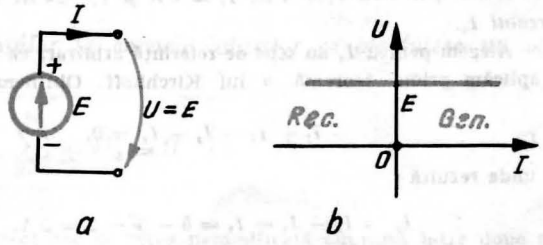


Fig. 3.5

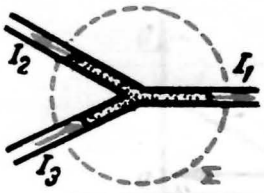


Fig. 3.6

B. TEOREMELE LUI KIRCHHOFF

1. Prima teoremă a lui Kirchhoff

Considerăm un punct de ramificaţie a curentului (punct pe care-l denumim *nod*) dintr-un circuit electric (fig. 3.6). Fie I_1, I_2 şi I_3 intensităţile curenţilor prin conductoarele care se ramifică din nodul respectiv. Înconjurăm nodul cu o suprafaţă Σ pentru care, conform legii conservării sarcinii putem scrie :

$$I_\Sigma = I_1 + I_2 - I_3$$

şi

$$\Delta q_\Sigma = 0$$

(sarcina electrică existentă pe suprafeţele conductoarelor parcurse de curent continuu este invariabilă în timp). Înlocuind în enunţul legii $I_\Sigma = -\frac{\Delta q_\Sigma}{\Delta t}$, obţinem :

$$\boxed{I_1 + I_2 - I_3 = 0} \tag{3.1}$$

Această relaţie reprezintă **prima teoremă a lui Kirchhoff** referitoare la nodul considerat. Ea se generalizează şi se enunţă astfel : *suma algebrică a intensităţilor curenţilor din laturile care se ramifică dintr-un nod al unui circuit de curent continuu* (reţea de c.c.) *este nulă* :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \pm I_k = 0} \tag{3.2}$$

○ **Precizare.** După convenţia adoptată în formularea legii conservării sarcinii, intensităţile curenţilor care pleacă din nod se iau cu semnul plus, iar cele ale curenţilor care vin în nod — cu semnul minus.

Aplicaţie. *Din nodul (a) al unei reţele de c.c. se ramifică patru conductoare. Ştiind că* $I_1 = 1\ A$, $I_2 = 2\ A$ *şi* $I_3 = 5\ A$, *să se determine curentul* I_4.

Alegem pentru I_4 un sens de referinţă arbitrar, ca în figura 3.7, şi aplicăm prima teoremă a lui Kirchhoff. Obţinem :

$$I_1 + I_2 - I_3 + I_4 = 0,$$

de unde rezultă :

$$I_4 = I_3 - I_1 - I_2 = 5 - 1 - 2 = 2\ \text{A}.$$

Sensul curentului I_4 coincide cu sensul de referinţă ales arbitrar.

Fig. 3.7

2. A doua teoremă a lui Kirchhoff

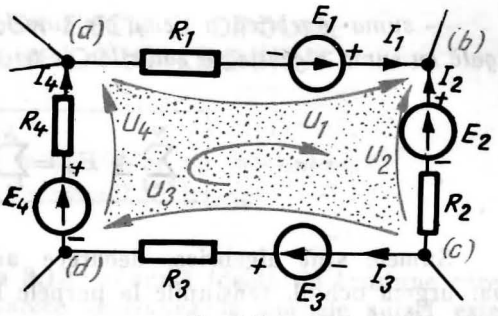


Fig. 3.8

Considerăm o succesiune (un lanț) de laturi* dintr-o rețea de c.c., care formează un contur închis pe care-l denumim *ochi de rețea* (fig. 3.8).

Admițînd că sensurile de referință ale curenților din laturi (fig. 3.8) coincid cu sensurile de referință ale t.e.m. și considerînd tensiunile de la bornele laturilor cu sensurile de referință din figura 3.8, vom putea scrie :

$$\begin{cases} U_1 + E_1 = R_1 I_1 \\ U_2 + E_2 = R_2 I_2 \\ U_3 + E_3 = R_3 I_3 \\ U_4 + E_4 = R_4 I_4 \end{cases} \tag{3.3}$$

Scriem și relațiile de legătură între tensiunile la bornele laturilor și potențialele bornelor, respectiv :

$$\begin{cases} U_1 = V_a - V_b \\ U_2 = V_c - V_b \\ U_3 = V_c - V_d \\ U_4 = V_d - V_a \end{cases} \tag{3.4}$$

Înmulțind cu (—1) relația a doua și adunînd parte cu parte se obține :

$$\boxed{U_1 - U_2 + U_3 + U_4 = 0} \tag{3.5}$$

Procedînd la fel cu sistemul de ecuații (3.3) și ținînd cont de rezultatul stabilit prin (3.5), obținem și relația :

$$\boxed{E_1 - E_2 + E_3 + E_4 = R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4} \tag{3.5'}$$

Am obținut astfel două formulări diferite pentru teorema a doua a lui Kirchhoff (echivalente numai pentru circuite ce conțin în exclusivitate elemente liniare de circuit). Avem deci pentru **teorema a doua a lui Kirchhoff** următoarele enunțuri :

— *suma algebrică a tensiunilor la bornele laturilor ce alcătuiesc un ochi de rețea este nulă* :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \pm U_k = 0} \tag{3.6}$$

---

* Prin *latură* se înțelege orice porțiune de rețea neramificată cuprinsă între două noduri.

— *suma algebrică a t.e.m. ale surselor din laturile unui ochi de rețea este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune pe rezistoarele laturilor :*

$$\sum_{k=1}^{N} \pm E_k = \sum_{k=1}^{N} \pm R_k I_k \tag{3.7}$$

Sumele sînt algebrice, deoarece adoptînd un sens arbitrar în care parcurgem ochiul, tensiunile la bornele laturilor care au sensul de referință opus sensului ales pe ochi intervin în sume cu semnul minus. Aceeași regulă de stabilire a semnelor se aplică și pentru t.e.m. și căderile de tensiune pe rezistoarele din laturile ochiului.

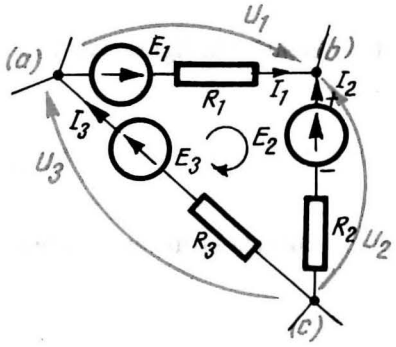


Fig. 3.9

Aplicația 1. *Să se aplice teorema a doua a lui Kirchhoff pentru rețeaua din figura 3.9.*

Conform primului enunț vom scrie :

$$U_1 - U_2 + U_3 = 0,$$

iar după al doilea :

$$E_1 - E_2 + E_3 = R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3.$$

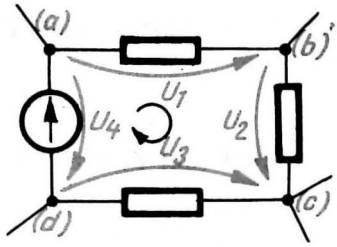


Fig. 3.10

Aplicația 2. *În ochiul de rețea din figura 3.10 se dau* $U_1 = 200$ *V,* $U_2 = 50$ *V și* $U_3 = 400$ *V. Se cere tensiunea* U_4*, cu sensul de referință din figură.*

Aplicînd prima formă a teoremei a doua a lui Kirchhoff, obținem :

$$U_1 + U_2 - U_3 - U_4 = 0,$$

de unde rezultă :

$$U_4 = U_3 - U_1 - U_2 = 400 - 200 - 50 = 150 \text{ V}.$$

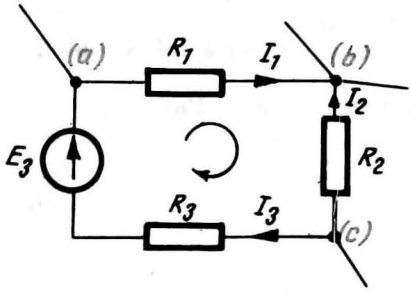


Fig. 3.11

Aplicația 3. *În ochiul de rețea din figura 3.11 se dau :* $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 1\ \Omega$ *și curenții* $I_1 = 5$ *A,* $I_2 = 1$ *A și* $I_3 = 10$ *A. Se cere t.e.m.* E_3.

Scriind a doua formă a teoremei a doua a lui Kirchhoff obținem :

$$E_3 = R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = 50 -$$

$$- 20 + 10 = 40 \text{ V}.$$

C. STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE DIPOLARE CU AJUTORUL TEOREMELOR LUI KIRCHHOFF

1. Reguli de asociere a sensurilor de referință ale curentului și tensiunii la borne

Să analizăm circuitul din figura 3.12 : o sursă ideală de tensiune care alimentează un rezistor liniar. Deoarece tensiunea la bornele sursei este aceeași cu cea de la bornele rezistorului ($U = E$ și respectiv $U = RI$), putem deduce curentul prin circuit :

$$I = \frac{E}{R}.$$

Puterea electrică dezvoltată de sursă

$$P_g = EI$$

este cedată rezistorului, unde energia se transformă în căldură prin efect Joule. Deci :

$$P_g = EI = RI^2 = P_R.$$

Față de bornele A, B, curentul prin borne și tensiunea între borne au sensurile asociate în moduri diferite, după cum ne referim la partea din stînga unde este sursa de energie sau la partea din dreapta unde este receptorul de energie.

Pentru un circuit dipolar se spune că *sensurile tensiunii și curentului sînt asociate după regula utilizată pentru generatoare dacă sensurile lor sînt cele pentru sursa electrică în regim de generator* (fig. 3.13). *Tensiunea și curentul au sensurile de referință asociate după regula utilizată pentru receptoare dacă sensurile lor sînt cele utilizate pentru un rezistor* (fig. 3.14).

○ **Important !** Precizarea regulii de asociere a sensurilor de referință ale tensiunii și curentului la bornele unui element dipolar este obligatorie. Numai în raport cu aceste sensuri au semnificație valorile numerice ale acestor mărimi, care pot fi pozitive sau negative.

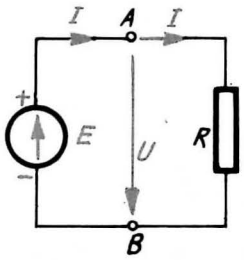


Fig. 3.12

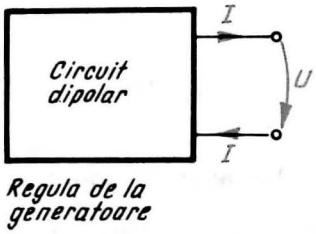


Fig. 3.13

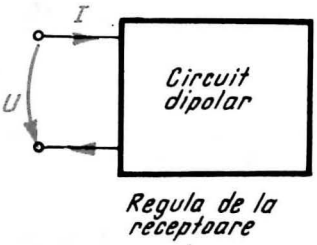


Fig. 3.14

2. Conexiunile rezistoarelor

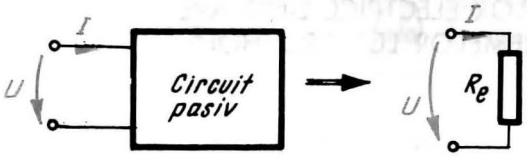


Fig. 3.15

Rezistența echivalentă a unui circuit dipolar liniar și pasiv este raportul dintre tensiunea aplicată la borne și intensitatea curentului prin circuit (fig. 3.15).

Relația de calcul este :

$$R_e = \frac{U}{I}.$$

Să analizăm, pe această bază, asocierea în serie și în paralel a rezistoarelor.

a. *Asocierea în serie*

Pentru început să considerăm două rezistoare legate în serie (fig. 3.16)
Deoarece $U = U_1 + U_2$, unde $U_1 = R_1 I$, $U_2 = R_2 I$, iar $U = R_e I$, obținem :

$$R_e I = R_1 I + R_2 I$$

de unde, simplificînd cu $I \neq 0$, se obține :

$$\boxed{R_e = R_1 + R_2} \tag{3.8}$$

Deoarece $R_e = \frac{1}{G_e}$; $R_1 = \frac{1}{G_1}$ și $R_2 = \frac{1}{G_2}$, obținem :

$$\boxed{\frac{1}{G_e} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}} \tag{3.9}$$

sau :

$$\boxed{G_e = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}}. \tag{3.10}$$

Dacă elementele sînt identice, $R_e = 2R$ și $G_e = \frac{G}{2}$.

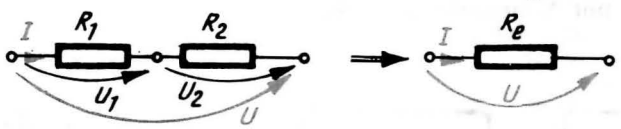


Fig. 3.16

b. *Asocierea în paralel*

Dacă cele două rezistoare sînt conectate în paralel, atunci rezistența echivalentă se determină punînd condiția ca pentru aceeași tensiune între borne curentul prin borne în cele două variante să fie același (fig. 3.17).

Curentul prin rezistența echivalentă este $I = \dfrac{U}{R_e}$ și, conform primei teoreme a lui Kirchhoff, este dat de :

$$I = I_1 + I_2$$

unde $I_1 = \dfrac{U}{R_1}$ și $U_2 = \dfrac{U}{R_2}$.

Făcînd înlocuirile și simplificînd cu $U \neq 0$, obținem :

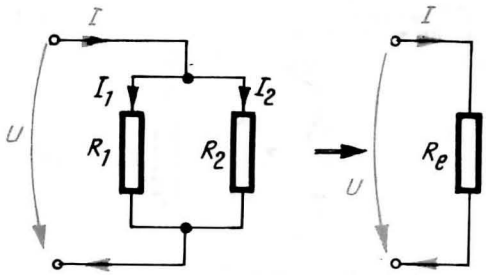


Fig. 3.17

$$\boxed{\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \tag{3.11}$$

sau sub altă formă :

$$\boxed{R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \tag{3.12}$$

Mai obținem, evident,

$$\boxed{G_e = G_1 + G_2.} \tag{3.13}$$

Dacă elementele sînt identice, atunci $G_e = 2G$ și $R_e = \dfrac{R}{2}$.

c. *Generalizarea relațiilor de calcul al rezistențelor echivalente*

Procedînd la fel putem stabili relațiile de calcul pentru cazul în care sînt asociate în serie sau paralel un număr n de rezistoare diferite.

● Astfel, **pentru n rezistoare în serie** (fig. 3.18) teorema a doua a lui Kirchhoff ne dă:

$$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n,$$

unde $U = R_e I$ și $U_k = IR_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Făcînd înlocuirile se obține, după împărțire prin I, relația

$$\boxed{R_e = R_1 + R_2 + \ldots + R_n,}$$

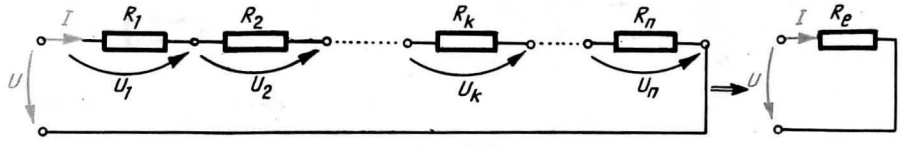


Fig. 3.18

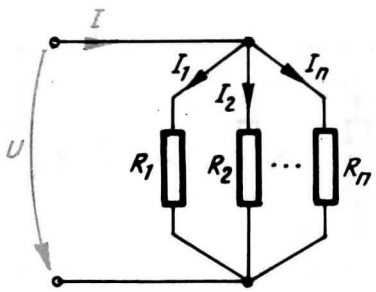


Fig. 3.19

pe care o mai scriem

$$R_e = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

sau

$$\frac{1}{G_e} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{G_k}. \qquad (3.14)$$

Dacă rezistoarele sînt identice, $R_e = nR$ și $G_e = \frac{G}{n}$.

● Dacă vom considera **aceleași elemente legate în paralel** (fig. 3.19), atunci prima teoremă a lui Kirchhoff ne dă :

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n,$$

unde $I = \frac{U}{R_e}$ și $I_k = \frac{U}{R_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Înlocuind curenții și împărțind prin tensiunea U obținem :

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n},$$

relație care se mai scrie :

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} \qquad (3.15)$$

sau

$$G_e = \sum_{k=1}^{n} G_k.$$

Dacă rezistoarele sînt identice, $G_e = nG$ și $R_e = \frac{R}{n}$.

Aplicația 1. *Rezistențele rezistoarelor din figura 3.20 au valorile* $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 6\ \Omega$. *Să se afle rezistența echivalentă.*

În cazul de față întîlnim o asociere mixtă : R_1 cu R_2 în serie și, împreună, în paralel cu R_3. Utilizînd relațiile (3.8) și (3.12), aflăm :

$$R_e = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 2\ \Omega.$$

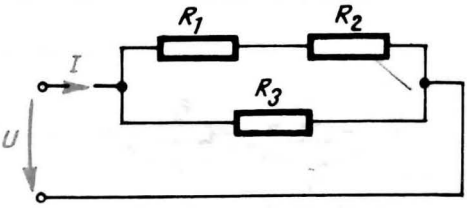


Fig. 3.20

Aplicația 2. *Rezistențele rezistoarelor din figura 3.21 au valorile* $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $R_3 = 6\ \Omega$. *Să se afle rezistența echivalentă.*

Și aici se identifică asocierea mixtă ; R_1 în serie cu R_2 și R_3 în paralel. Utilizînd relațiile de asociere aflăm :

$$R_e = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 4 + \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 6\ \Omega.$$

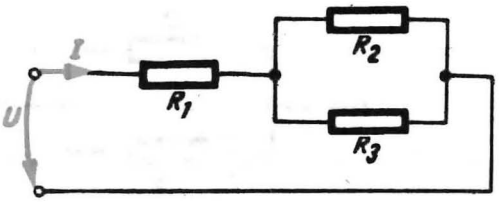


Fig. 3.21

3. Divizoarele de tensiune și curent

a. Divizorul de tensiune

Prin **divizor de tensiune** se înțelege *circuitul alcătuit din două rezistoare în serie în scopul de a obține o tensiune mai mică decît tensiunea U de la bornele sistemului* (fig. 3.22).

Curentul care trece prin divizor este :

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2},$$

iar tensiunea care ne interesează, să zicem U_2, este

$$U_2 = R_2 I = R_2 \frac{U}{R_1 + R_2},$$

respectiv :

$$\boxed{U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}} \qquad (3.16)$$

adică o fracțiune din tensiunea la borne.

Aplicație. *Imaginați un dispozitiv care să permită obținerea unei tensiuni ajustabile între zero și o valoare limită U.*

Putem utiliza un reostat cu un singur sul de rezistență R, prevăzut cu un cursor mobil. Simbolul grafic al dispozitivului este cel din figura 3.23. Tensiunea dintre cursor și borna O, presupusă de potențial nul, este $U_x = U \frac{x}{R}$, unde x este rezistența reostatului între cursor și borna de masă. La deplasarea cursorului de jos în sus, tensiunea U_x crește de la zero la U.

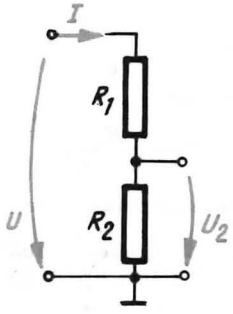


Fig. 3.22

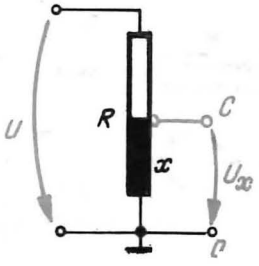


Fig. 3.23

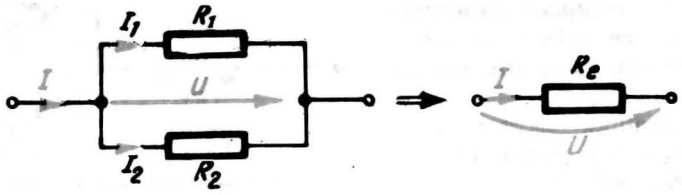


Fig. 3.24

b. *Divizorul de curent*

Prin **divizor de curent** se înțelege *circuitul format din două rezistoare în paralel plasat într-o latură a unui circuit cu scopul de a obține prin unul dintre elemente un curent mai mic decît curentul principal I* (fig. 3.24).

Cele două elemente asociate în paralel prezintă o rezistență echivalentă $R_e = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ și deci tensiunea comună la bornele lor este :

$$U = IR_e.$$

Curenții prin fiecare dintre elementele divizorului sînt :

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{IR_e}{R_1}; \qquad \boxed{I_1 = I\frac{R_2}{R_1 + R_2}} \tag{3.17}$$

și

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{IR_e}{R_2}; \qquad \boxed{I_2 = I\frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

Aplicația 1. *Un galvanometru cu rezistența de 9,9 Ω indică 1 mA pe diviziune. Scala aparatului posedă 50 div. Să se determine rezistența șuntului dacă dorim ca instrumentul să poată fi folosit pentru a măsura curenți pînă la 1 A (fig. 3.25).*

Din formula divizorului de curent

$$I_g = I\frac{R_s}{R_g + R_s}$$

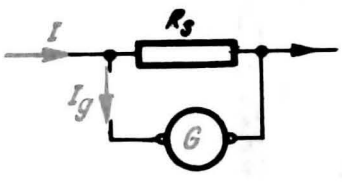


Fig. 3.25

deducem :

$$R_s = \frac{R_g}{n_A - 1};$$

unde $n_A = \dfrac{I}{I_g}$ este raportul în care se demultiplică curentul prin galvanometru în prezența șuntului. Deoarece $I_{g\,max} = 50 \times 10^{-3} = 5 \times 10^{-2}$ A, rezultă :

$$n_A = \frac{1}{5 \cdot 10^{-2}} = \frac{10^2}{5} = 20$$

și deci:

$$R_s = \frac{9,9}{20-1} = 0,521\ \Omega.$$

Aplicația 2. *Să se determine rezistența ampermetrului din problema precedentă.*

Rezistența ampermetrului este rezistența echivalentă a celor două elemente conectate în paralel: galvanometrul și șuntul.

$$R_A = \frac{R_g R_s}{R_g + R_s} = \frac{0,521 \times 9,9}{0,521 + 9,9} = 0,495\ \Omega.$$

Aplicația 3. *Să se determine tensiunea la bornele ampermetrului dacă acul deviază la jumătatea scalei.*

Curentul prin ampermetru este jumătate din curentul maxim pe care-l poate indica și deci tensiunea la borne este:

$$U_A = 0,5 \times 0,495 = 0,247\ \text{V}.$$

Aplicația 4. *Ce rezistență trebuie conectată în serie cu un galvanometru avînd rezistența de 9,9 Ω pentru a dispune de un voltmetru capabil să măsoare tensiuni pînă la 30 V (fig. 3.26)? (la capătul scalei curentul este de 50 mA).*

Cînd acul deviază la capătul scalei, tensiunea la bornele galvanometrului este $U_g = 50 \times 10^{-3} \times 9,9 = 0,495\text{V}$. Utilizînd formula divizorului de tensiune, scriem:

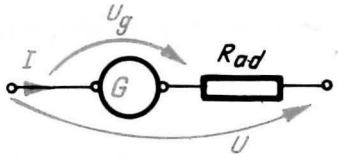


Fig. 3.26

$$U_g = U \frac{R_g}{R_g + R_{ad}},$$

de unde se obține rezistența adițională:

$$R_{ad} = R_g(n_v - 1),$$

$n_v = \dfrac{U}{U_g}$ este raportul de demultiplicare al divizorului de tensiune format cu R_g și R_{ad}. Pentru $n_v = \dfrac{30}{0,495} = 60,61$ rezultă:

$$R_{ad} = 9,9 \times (60,61 - 1) = 590,1\ \Omega.$$

Aplicația 5. *Să se determine rezistența voltmetrului din aplicația precedentă.*

$$R_v = R_g + R_{ad} = 590,1 + 9,9 = 600\ \Omega,$$

sau, după legea lui Ohm:

$$R_v = \frac{U}{I_g} = \frac{30}{5 \cdot 10^{-2}} = \frac{3 \times 10^3}{5} = 600\ \Omega.$$

4. Sursa reală de tensiune

O **sursă reală de tensiune** *este un generator care are rezistență internă.* Am văzut că un astfel de generator funcționînd în sarcină este caracterizat de ecuația:

$$U_{AB} = e - R_g I,$$

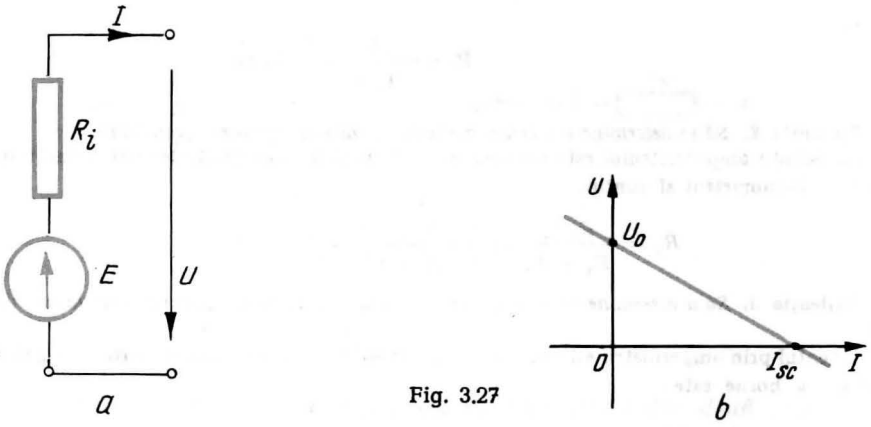


Fig. 3.27

sau, cu notaţiile adoptate pentru circuitele de c.c. :

$$U = E - R_i I \tag{3.18}$$

unde $R_i = R_g$ este *rezistenţa internă a generatorului.*

Teorema a doua a lui Kirchhoff ne permite să stabilim schema echivalentă cu elemente ideale care este descrisă de această ecuaţie (fig. 3.27, *a*). Observăm că spre deosebire de sursa ideală de tensiune, pentru care U nu depinde de I, *în cazul sursei reale tensiunea la borne scade cînd curentul creşte.*

La funcţionarea în gol $(I = 0)$:

$$U|_{I=0} = U_0 = E.$$

La funcţionarea în scurtcircuit $(U = 0)$:

$$I|_{U=0} = I_{sc} = \frac{E}{R_i} = \frac{U_0}{R_i}.$$

Caracteristica tensiune-curent este o dreaptă (fig. 3.27, *b*).

Aplicaţia 1. *O sursă reală de tensiune are* $U_0 = 12$ V *şi* $I_{sc} = 120$ A. *Se cere schema echivalentă cu elemente ideale.*

Elementele ideale sînt :

$$E = U_0 = 12 \text{ V}; \; R_i = \frac{U_0}{I_{sc}} = \frac{12}{120} = 0{,}1\Omega.$$

Aplicaţia 2. *O sursă reală de tensiune debitează* $I_1 = 10$ A *la* $U_1 = 100$ V *şi* $I_2 = 20$ A *la* $U_2 = 50$ V. *Se cere schema ei echivalentă, tensiunea de mers în gol şi intensitatea curentului de scurtcircuit.*

Din ecuaţiile $U_1 = E - R_i I_1$ **şi** $U_2 = E - R_i I_2$ **obţinem :**

$$R_i = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1} = \frac{100 - 50}{20 - 10} = 5\,\Omega.$$

Din prima ecuaţie rezultă :

$$E = U_1 + R_i I_1 = 100 + 5 \times 10 = 150 \text{ V} = U_0.$$

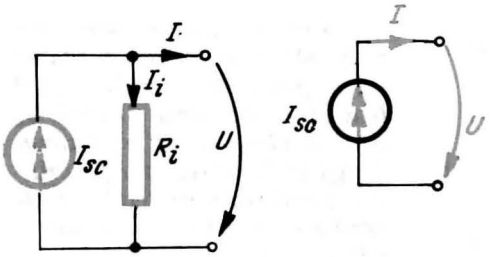


Fig. 3.28

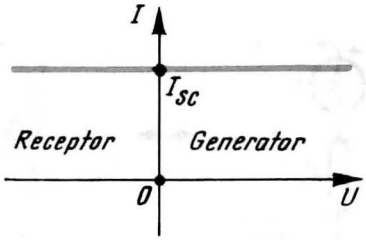


Fig. 3.29

Obținem de asemenea :

$$I_{sc} = \frac{E}{R_i} = \frac{150}{5} = 30 \text{ A}.$$

5. Sursa reală de curent

Împărțind ecuația (3.18) cu R_i, obținem :

$$\frac{U}{R_i} = \frac{E}{R_i} - I = I_{sc} - I$$

sau

$$I_{sc} = \frac{U}{R_i} + I = I_i + I.$$

Prima teoremă a lui Kirchhoff ne permite să stabilim o schemă echivalentă (fig. 3.28), în care elementul ideal care debitează curentul I_{sc} se numește sursă ideală de curent. Pentru o sursă ideală de curent $R_i = \infty$, ($I_i = 0$) și $I = I_{sc}$ pentru orice U (fig. 3.29). De regulă I_{sc} se mai notează și cu I_g.

Ansamblul format din sursa ideală de curent în paralel cu rezistența internă a generatorului se numește **sursă reală de curent.**

Caracteristica curent-tensiune a sursei reale de curent este reprezentată în figura 3.30. Se observă că pe măsură ce tensiunea crește, intensitatea curentului debitat de sursă scade pînă la valoarea $I = 0$ cînd $U = U_0 = R_i I_{sc}$.

Aplicația 1. *Un generator are t.e.m. $E = 100$ V și rezistența internă $R_i = 0{,}5\ \Omega$. Să se determine sursa echivalentă reală de curent.*

$$I_{sc} = \frac{E}{R_i} = \frac{100}{0{,}5} = 200 \text{ A} ; \; R_i = 0{,}5\ \Omega.$$

Aplicația 2. *Un generator are $U_0 = 200$ V și $I_{sc} = 200$ A. Să se determine sursa reală echivalentă de curent.*

$$I_g = I_{sc} = 200 \text{ A} ; \; R_i = \frac{U_0}{I_g} = \frac{200}{200} = 1\ \Omega.$$

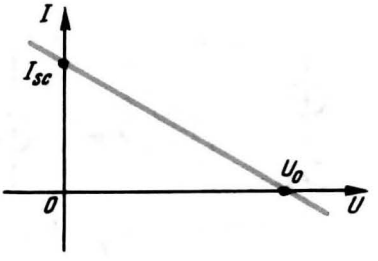


Fig. 3.30

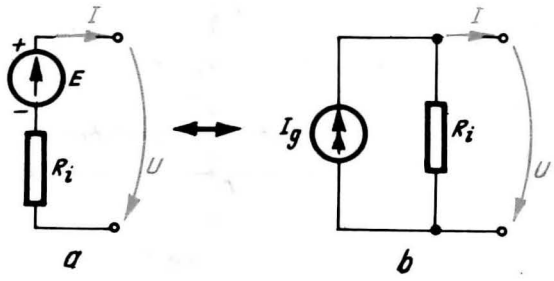


Fig. 3.31

Putem rezuma astfel rezultatele obținute mai înainte: *orice generator electric având tensiunea de mers în gol U_0 și curentul de scurtcircuit I_{sc} poate fi reprezentat fie printr-o sursă reală de tensiune ale cărei elemente ideale se determină prin:*

$$E = U_0 \text{ și } R_i = R_g = \frac{U_0}{I_{sc}}$$

(fig. 3.31, *a*),

fie printr-o sursă reală de curent ale cărei elemente ideale se determină prin:

$$I_g = I_{sc} \text{ și } R_i = \frac{U_0}{I_{sc}}$$

(fig. 3.31, *b*).

6. Asocierile surselor ideale

a. Asocierea surselor de tensiune

Două surse de tensiune ideale și *asociate în serie* în montaj adițional (fig. 3.32, *a*) admit o sursă echivalentă cu t.e.m. $E_e = E_1 + E_2$.

Dacă sursele sînt în opoziție (montaj diferențial) ca în figura 3.32, *b*, t.e.m. a sursei echivalente este $E_e = E_1 - E_2$. Prin urmare, *un sistem de surse ideale de tensiune asociate în serie admit o sursă echivalentă cu t.e.m. egală cu suma algebrică a t.e.m. a surselor componente:*

$$E_e = \sum_{k=1}^{n} \pm E_k \tag{3.19}$$

○ **Atenție !** Două surse ideale de tensiune se pot conecta *în paralel* numai dacă tensiunile lor electromotoare sînt egale ($E_1 = E_2 = E$). T.e.m. a sursei echivalente este atunci, $E_e = E$.

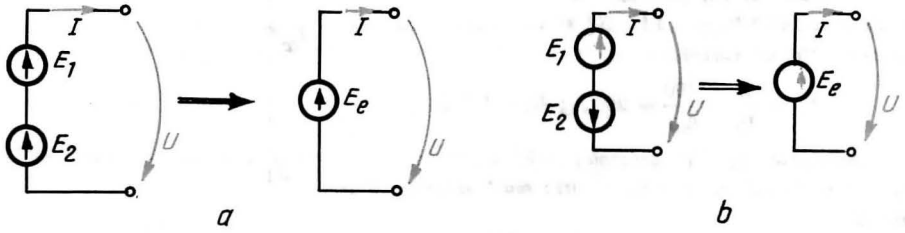


Fig. 3.32

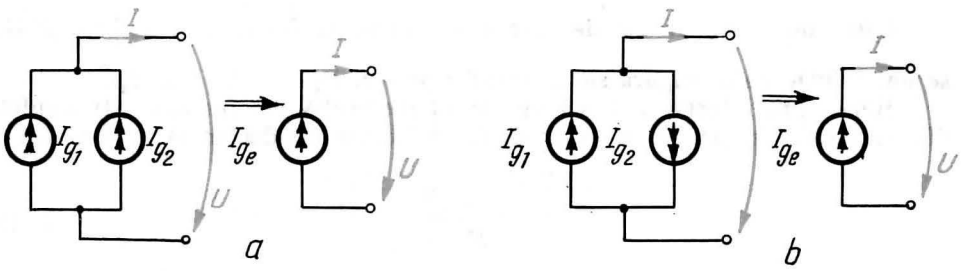


Fig. 3.33

b. *Asocierea surselor de curent*

Două surse ideale de curent *asociate în paralel* admit o sursă echivalentă de curent cu curentul $I_{ge} = I_{g1} + I_{g2}$ cînd sursele sînt conectate în montaj adiţional (fig. 3.33, *a*).

Dacă sursele sînt în opoziţie (montaj diferenţial) (fig. 3.33, *b*) curentul sursei echivalente este $I_{ge} = I_{g1} - I_{g2}$.

Prin urmare : *un sistem de surse ideale de curent asociate în paralel admit o sursă de curent echivalentă avînd curentul egal cu suma algebrică a curenţilor surselor componente* :

$$I_{ge} = \sum_{k=1}^{n} \pm I_{gk} \tag{3.20}$$

○ **Atenţie !** Două surse ideale de curent se pot conecta *în serie* numai dacă au curenţii egali ($I_{g1} = I_{g2} = I_g$). Curentul sursei de curent echivalente cu sursele în serie este curentul lor comun, $I_{ge} = I_g$.

7. Asocierea surselor reale

a. *Asocierea în paralel a surselor de tensiune*

Fie circuitul din figura 3.34 pentru care căutăm elementele E_e şi R_e ale unei surse echivalente.

Determinarea elementelor se face pe o cale simplă, *transformînd sursele de tensiune în surse de curent* (fig. 3.35).

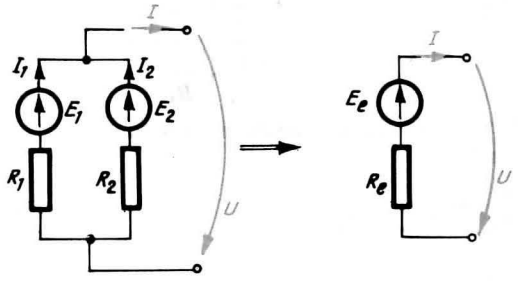


Fig. 3.34

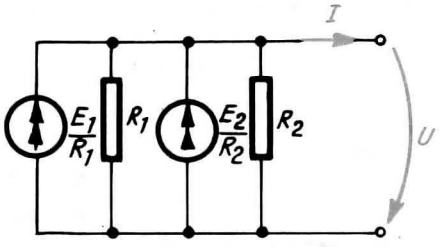


Fig. 3.35

Cele două surse ideale de curent, cu curenții $\frac{E_1}{R_1} = E_1G_1$ și $\frac{E_2}{R_2} = E_2G_2$ se pot înlocui cu o singură sursă având curentul $E_1G_1 + E_2G_2 = I_{ge}$.

Rezistența internă a sursei de curent (respectiv conductanța ei) rezultă din asocierea în paralel a celor două rezistențe (conductanțe). Scriem deci :

$$R_e = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} \tag{3.21}$$

sau

$$G_e = G_1 + G_2.$$

Revenim acum la o sursă de tensiune, care va avea rezistența internă R_e și t.e.m. echivalentă :

$$E_e = R_eI_{ge} = \frac{1}{G_e}\ I_{ge} = \frac{E_1G_1 + E_2G_2}{G_1 + G_2} = \frac{E_1\frac{1}{R_1} + E_2\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \tag{3.22}$$

○ **Concluzie.** *T.e.m. a sursei echivalente este valoarea medie ponderată a t.e.m. ale surselor componente, ponderile fiind conductanțele interne. Rezistența internă a sursei echivalente se determină ca și cînd rezistențele surselor ar fi în paralel.*

Aplicația 1. *Să se determine elementele sursei de tensiune echivalente cu două surse identice în paralel.*

Conform relațiilor stabilite :

$$E_e = \frac{2EG}{2G} = E \text{ și } R_e = \frac{R}{2}.$$

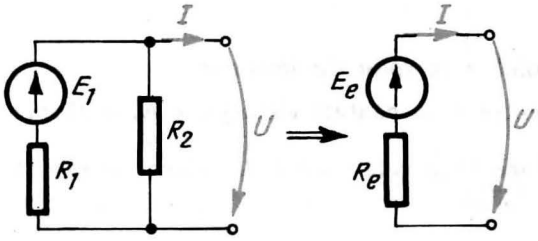


Fig. 3.36

Aplicația 2. *În circuitul din figura 3.36 putem considera că sînt figurate două surse în paralel, una dintre ele avînd t.e.m. nulă ($E_2 = 0$). Să se determine elementele sursei echivalente de tensiune.*

Aplicăm relația :

$$E_e = \frac{E_1\frac{1}{R_1} + E_2\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}},$$

în care se înlocuiește $E_2 = 0$,

Obținem :

$$E_e = \frac{E_1}{R_1} \cdot \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = E_1\frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Rezistența internă este :

$$R_e = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

b. *Asocierea în serie a surselor de tensiune*

Două surse de tensiune asociate în serie admit o sursă echivalentă cu E_e și R_e (fig. 3.37) care se determină punînd condiția ca pentru aceeași tensiune la borne bornele să fie traversate de același curent. Putem scrie relațiile evidente :

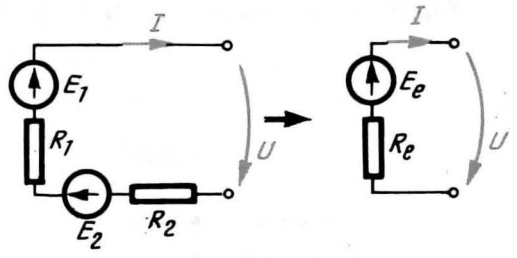


Fig. 3.37

$$U = E_e - R_e I \text{ și } U = E_1 + E_2 - (R_1 + R_2)I,$$

din care obținem identificînd termenii :

$$E_e = E_1 + E_2$$

și

$$R_e = R_1 + R_2.$$

Pentru n surse, relațiile de asociere rezultă imediat :

$$\boxed{E_e = \sum_{k=1}^{n} \pm E_k} \tag{3.23}$$

$$\boxed{R_e = \sum_{k=1}^{n} R_k} \tag{3.24}$$

Dacă cele n surse sînt identice atunci :

$$E_e = nE ;$$

și

$$R_e = nR.$$

c. *Asocierea în paralel a surselor de curent*

Putem interpreta sistemul format din n surse reale de curent conectate în paralel ca fiind alcătuit din n surse ideale de curent și n rezistoare în paralel. Elementele sursei echivalente rezultă atunci imediat

$$\boxed{I_{ge} = \sum_{k=1}^{n} \pm I_{gk}} \tag{3.25}$$

și

$$\boxed{G_e = \sum_{k=1}^{n} G_k} \tag{3.26}$$

Pentru n surse identice relațiile devin :

$$I_{ge} = nI_g$$

și

$$G_e = nG.$$

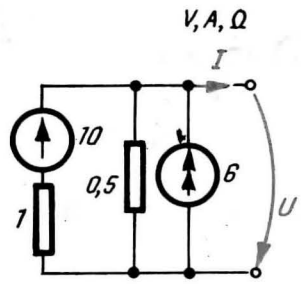


Fig. 3.38

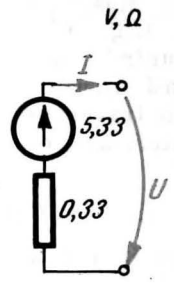


Fig. 3.39

Aplicație. *Să se afle sursa de tensiune echivalentă cu sistemul de surse din figura 3.38.*

Se transformă sursa de tensiune în sursă de curent, după care se aplică regulile de asociere în paralel a surselor reale de curent. Obținem :

$$I_{ge} = \frac{E}{R} + I_g = \frac{10}{1} + 6 = 16 \text{ A};$$

$$R_e = \frac{1 \times 0{,}5}{1 + 0{,}5} = \frac{0{,}5}{1{,}5} = \frac{1}{3} \Omega.$$

Sursa de tensiune echivalentă (fig. 3.39) are deci elementele :

$$E_e = I_{ge} R_e = 16 \times \frac{1}{3} = 5{,}33 \text{ V};$$

$$R_e = 0{,}33 \Omega.$$

D. ANALIZA CIRCUITELOR ELECTRICE CU AJUTORUL TEOREMELOR LUI KIRCHHOFF

1. Diagrame orientate de curenți și tensiuni

Tensiunile la bornele laturilor și curenții prin laturile unei rețele electrice satisfac teoremele lui Kirchhoff. Prima teoremă a lui Kirchhoff se referă la curenții prin laturile care se ramifică dintr-un nod. A doua teoremă se referă la tensiunile la bornele laturilor ce alcătuiesc un ochi.

Să urmărim modul de aplicare a teoremelor lui Kirchhoff la analiza circuitelor de c.c.

a. *Aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff*

După cum ştim, prima teoremă stabileşte că suma algebrică a intensităţilor curenţilor din laturile care se ramifică dintr-un nod este nulă :

$$\sum_{k \in B} \pm I_k = 0,$$

unde cu B s-a notat mulţimea indicilor laturilor care se ramifică în nodul (b).

Aplicaţia 1. *Într-un circuit cu trei noduri şi şase laturi ($N = 3$, $L = 6$) se cunosc valorile curenţilor aşa cum se indică în figura 3.40. Să se verifice prima teoremă a lui Kirchhoff.*

Aplicînd teorema pentru fiecare nod scriem identităţile :

(a) $4 + 8 - 11 - 1 = 0$;

(b) $5 + 7 - 4 - 8 = 0$;

(c) $11 + 1 - 5 - 7 = 0$.

ceea ce dovedeşte că intensităţile curenţilor sînt în acord cu enunţul primei teoreme a lui Kirchhoff.

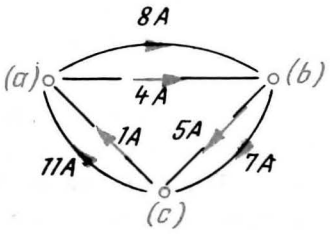


Fig. 3.40

○ **Observaţie.** Pentru verificarea primei teoreme a lui Kirchhoff nu este necesar să se reprezinte circuitul cu toate detaliile sale. Este suficient să se figureze numai nodurile şi laturile circuitului cu sensurile curenţilor figuraţi pe laturi. O asemenea reprezentare simplificată a circuitului se numeşte *diagramă orientată de curenţi*.

Aplicaţia 2. *Se dă diagrama de curenţi din figura 3.41. Se cere să se determine curenţii necunoscuţi.*

Scriind prima teoremă în nodurile (a), (b) şi (c) obţinem :

(a) $I_1 + 2 - 1 - 3 = 0$;

(b) $I_2 + 1 + 1 - I_1 - 2 = 0$;

(c) $I_3 + 1 + 3 = 0$.

Rezolvînd sistemul, rezultă :

$$I_1 = 2 \text{ A}, \quad I_2 = 2 \text{ A}, \quad I_3 = -4 \text{ A}.$$

Deoarece $I_3 < 0$, sensul real al curentului prin latura respectivă este opus sensului de referinţă ales arbitrar.

În figura 3.42 se indică diagrama completă a curenţilor (toate valorile sînt indicate în amperi).

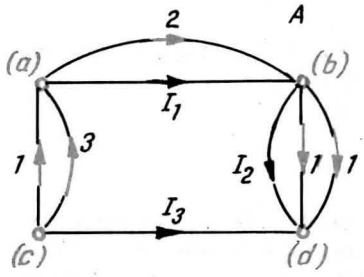


Fig. 3.41

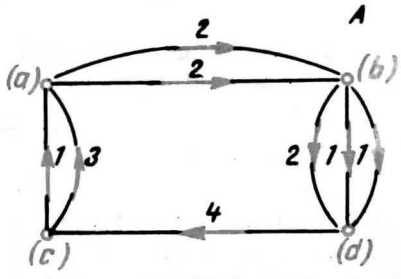


Fig. 3.42

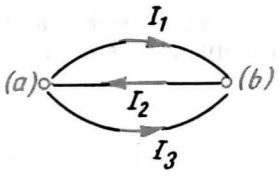


Fig. 3.43

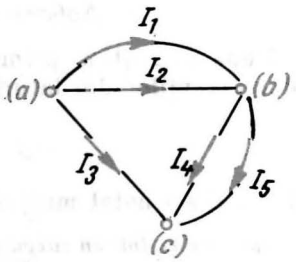


Fig. 3.44

În vederea rezolvării unui circuit este necesar să cunoaștem numărul ecuațiilor independente ce se obțin prin aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff. Pentru a găsi acest număr să analizăm două circuite simple, ale căror diagrame de curenți sînt prezentate în continuare.

Se verifică imediat că *pentru circuitul cu două noduri* din figura 3.43 se obține, în ambele noduri, aceeași ecuație : $I_1 - I_2 + I_3 = 0$ sau, ceea ce este același lucru $-I_1 + I_2 - I_3 = 0$.

Pentru circuitul cu trei noduri din figura 3.44 se pot scrie ecuațiile :

(*a*) $I_1 + I_2 + I_3 = 0$;

(*b*) $I_4 + I_5 - I_1 - I_2 = 0$;

(*c*) $-I_3 - I_4 - I_5 = 0$.

Dintre cele trei ecuații, numai două sînt independente (de exemplu, a treia ecuație se obține înmulțind primele două ecuații cu (— 1) și adunîndu-le). Rezultă, prin generalizare : *într-o rețea electrică cu N noduri se obțin, aplicînd prima teoremă a lui Kirchhoff, N—1 ecuații independente.* Deci :

$$\sum_{k \in B} \pm I_k = 0 \quad (b = 1, 2, \ldots, N-1).$$

b. *Aplicarea teoremei a doua a lui Kirchhoff*

● Reamintim aici **enunțul sub prima formă :** suma algebrică a tensiunilor la bornele laturilor unui ochi este nulă. Scriem deci :

$$\boxed{\sum_{k \in P} \pm U_k = 0,}$$

unde prin P s-a notat mulțimea indicilor laturilor ce intră în componența ochiului (p). În suma respectivă semnul este plus dacă sensul de referință al tensiunii coincide cu sensul în care parcurgem ochiul. În caz contrar, semnul tensiunii este minus.

Aplicația 1. *Să se verifice teorema a doua a lui Kirchhoff pentru ochiurile specificate pe diagrama de tensiuni din figura 3.45 Toate tensiunile sînt indicate în volți.*

Pentru ochiurile (*1*), (*2*), (*3*) se obțin identitățile:

(*1*) $8 + 17 - 25 = 0$;

(*2*) $15 + 10 - 25 = 0$;

(*3*) $17 - 10 - 7 = 0$.

○ **Observație.** Pentru aplicarea celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff conform primului enunț, nu este necesar să se figureze circuitul electric în amănunțime. Este suficient să se figureze numai nodurile și laturile cu sensul tensiunilor la borne marcat pe acestea (fig. 3.45). O asemenea reprezentare se numește *diagramă orientată de tensiuni*.

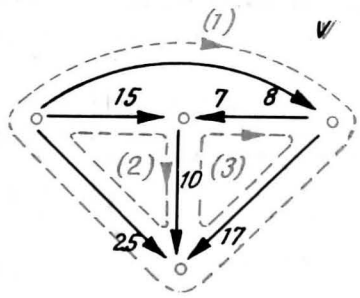


Fig. 3.45

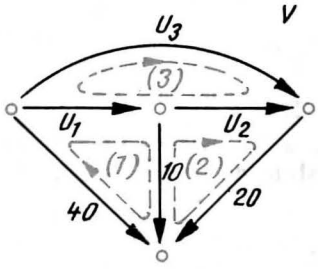


Fig. 3.46

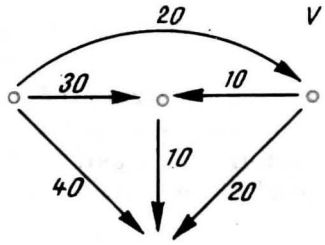


Fig. 3.47

Aplicația 2. *Într-un circuit cu $L = 6$ laturi și $N = 4$ noduri (fig. 3.46) se cunosc trei tensiuni la borne. Să se determine tensiunile necunoscute și să se întocmească diagrama de tensiuni.*

Să construim direct diagrama de tensiuni (fig. 3.47). Reprezentăm mai întîi tensiunile cunoscute. Din ochiul 1 rezultă apoi $U_1 = 40 - 10 = 30$ V, Similar se obține $U_2 = 10$ V și $U_3 = U_1 - U_2 = 30 - 10 = 20$ V.

Numărul ecuațiilor independente de tensiuni pe ochiuri este egal cu numărul ochiurilor independente.

Un ochi se numește independent în raport cu alte ochiuri dacă nu poate fi constituit din laturile acestora. De exemplu, în figura 3.48 ochiurile formate din laturile *1, 3, 6* ; *6, 2, 4* și *3, 4, 5* sînt independente deoarece fiecare dintre ele are cel puțin o latură pe care celelalte nu o au. În schimb ochiul format din laturile *1, 2, 5* nu mai este independent în raport cu primele trei deoarece este constituit din cîte o latură a fiecăruia dintre aceste ochiuri. Deci dacă L este numărul total de laturi ale unei rețele și N — numărul total de noduri, conform *teoremei lui Euler* numărul de ochiuri independente este:

$$\boxed{\mathcal{O} = L - N + 1} \qquad (3.27)$$

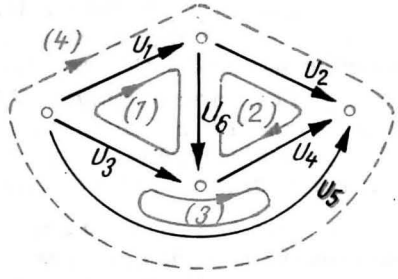


Fig. 3.48

În cazul rețelei din figura 3.47 ($L = 6$, $N = 4$):

$$\mathcal{O} = 6 - 4 + 1 = 3.$$

Așa cum un ochi oarecare rezultă din ochiurile independente, ecuația pe un ochi neindependent rezultă printr-o sumă algebrică a ecuațiilor ochiurilor independente. Să verificăm această proprietate pe circuitul din figura 3.48 cu $L = 6$, $N = 4$, $\mathcal{O} = 3$, pentru care ecuațiile pe ochiurile independente sînt:

$U_1 + U_6 - U_3 = 0$, pentru ochiul *1*;

$U_2 - U_4 - U_6 = 0$, pentru ochiul *2*;

$U_3 + U_4 - U_5 = 0$, pentru ochiul *3*.

Pentru alte ochiuri, de exemplu ochiul *4*, obținem

$$U_1 + U_2 - U_5 = 0$$

Ultima ecuație rezultă adunînd ecuațiile 1, 2 și 3.

Prin aplicarea celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff într-un circuit cu L laturi și N noduri se obține deci un sistem de $\mathcal{O} = L - N + 1$ ecuații independente de tensiuni pe ochiuri:

$$\sum_{m \in P} \pm U_m = 0 \ (p = 1, 2, \ldots, \mathcal{O}).$$

● **Utilizarea teoremei a doua a lui Kirchhoff în cea de-a doua formulare.** Adesea circuitele de c.c. conțin numai rezistoare și surse de tensiune. După echivalarea elementelor reale de circuit cu elemente ideale, o latură oarecare m a unui astfel de circuit poate fi compusă, cel mult, dintr-un rezistor ideal și o sursă ideală de tensiune legate în serie.

Putem atunci utiliza teorema a doua a lui Kirchhoff sub forma: suma algebrică a t.e.m. din laturile unui ochi de rețea este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune pe rezistențele laturilor ochiului. Putem deci scrie:

$$\boxed{\sum_{m \in P} \pm E_m = \sum_{m \in P} \pm R_m I_m} \ (p = 1, 2, \ldots, \mathcal{O}).$$

La aplicarea teoremei a doua a lui Kirchhoff sub această formă, ochiul de rețea se parcurge de două ori: odată pentru t.e.m., a doua oară pentru căderile de tensiune pe rezistoare.

○ **Precizare.** *Semnul unui t.e.m. este plus dacă sensul ei coincide cu sensul ales pe ochi (în caz contrar semnul este minus). Semnul unei căderi de tensiune $R_m I_m$ este plus dacă sensul curentului prin rezistor coincide cu sensul ales pe ochi (în caz contrar semnul este minus).*

Aplicația 1. *Să se deducă ecuațiile satisfăcute de intensitățile curenților prin cele trei laturi ale circuitului de c.c. din figura 3.49.*

Circuitul are $L = 3$ laturi și $N = 2$ noduri. Rezultă $\mathcal{O} = L - N + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$ ochiuri independente. Cei trei curenți I_1, I_2, I_3 au sensurile precizate în figură. Ecuațiile obținute

prin aplicarea celor două teoreme ale lui Kirchhoff sînt următoarele :

(*a*) $I_1 + I_2 - I_3 = 0$;

(*1*) $E_1 - E_2 = R_1 I_1 - R_2 I_2$;

(*2*) $E_2 + E_3 = R_2 I_2 + R_3 I_3$.

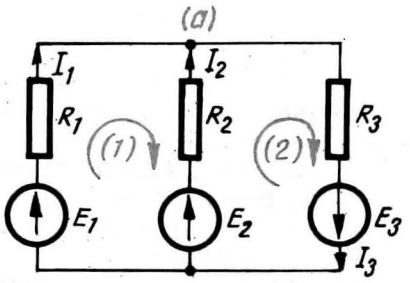


Fig. 3.49

Să detaliem *modul de aplicare a celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff*, de exemplu, pentru primul ochi. La prima parcurgere a ochiului se constată că sursa E_1 are același sens al t.e.m. cu cel ales pe ochi, pe cînd sursa E_2 are sensul contrar. În membrul sting al ecuației, t.e.m. E_1 va fi cu semnul plus, iar t.e.m. E_2 — cu semnul minus. La rezistoare, căderile de tensiune au același sens cu cel al curenților. Prin urmare tensiunea $R_1 I_1$ are semnul plus deoarece sensul curentului I_1 coincide cu cel al ochiului, în timp ce tensiunea $R_2 I_2$ are semnul minus deoarece sensul lui I_2 este opus sensului ochiului. Astfel, la a doua parcurgere completă a ochiului se obține suma algebrică a celor două căderi de tensiune pe rezistoare, cu semnele respective, sumă care reprezintă membrul drept al ecuației.

○ **Observație.** Forma particulară obținută pentru cea de-a doua teoremă a lui Kirchhoff este valabilă și pentru circuite liniare care au surse de curent. În acest caz, pentru ochiurile care conțin și surse de curent se aplică forma generală a celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff, în care se înlocuiesc în funcție de curenți numai tensiunile la bornele rezistoarelor și se păstrează ca necunoscute tensiunile la bornele surselor de curent.

Aplicația 2. *Să se obțină ecuațiile circuitului din figura 3.50 aplicînd, acolo unde este posibil, forma particulară a celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff.*

Ecuațiile care rezultă folosind prima teoremă a lui Kirchhoff rămîn nemodificate. Deci :

(*a*) $I_1 = I_3 + I_4 + I_g$;

(*b*) $-I_2 + I_3 + I_5 + I_g = 0$.

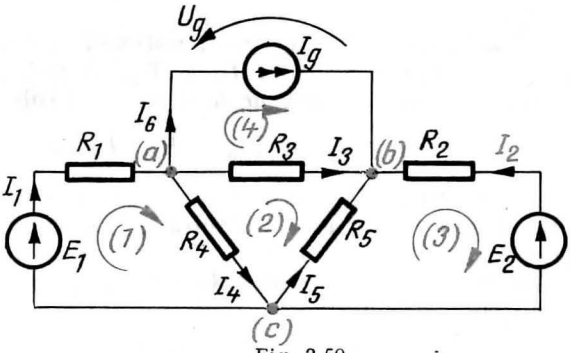


Fig. 3.50

În ecuații s-a efectuat substituția $I_6 = I_g$, unde I_g este curentul debitat de sursa ideală de curent. Deoarece laturile care formează primele trei ochiuri nu conțin surse de curent, a doua teoremă a lui Kirchhoff poate fi aplicată direct în forma sa particulară. Se obține :

(*1*) $E_1 = R_1 I_1 + R_4 I_4$;

(*2*) $0 = R_3 I_3 - R_5 I_5 - R_4 I_4$;

(*3*) $-E_2 = R_5 I_5 - R_2 I_2$.

Ultima ecuație, pentru ochiul *4*, rezultă pe baza formei generale și este :

$$-R_3 I_3 - U_g = 0.$$

2. Rezolvarea circuitelor cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff

Obținerea valorilor numerice ale intensităților curenților și tensiunilor dintr-un circuit de c.c. cuprinde **trei etape** și anume :

— *stabilirea sistemului de ecuații al circuitului ;*

— *rezolvarea sistemului de ecuații ;*

— *verificarea soluției.*

Pentru stabilirea sistemului de ecuații, rezumînd cunoștințele însușite din subcapitolul D.1, desprindem următoarele concluzii :

— *pentru un circuit de c.c. cu L laturi și N noduri se pot scrie :*

— *N—1 ecuații între cele L intensități ale curenților prin laturi ;*

— *L—N+1 ecuații între cele L tensiuni la bornele laturilor ;*

Se obține sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} \sum\limits_{m \in A} \pm I_m = 0 \quad (a = 1, 2, \ldots, (N-1)) ; \\ \sum\limits_{m \in P} \pm U_m = 0 \ (p = 1, 2, \ldots, (L-N+1)), \end{cases}$$

format din L ecuații cu un număr dublu, $2L$, de necunoscute, și anume :

I_m $(m = 1, 2, \ldots, L)$ — intensitățile curenților prin laturi ;

U_m $(m = 1, 2, \ldots, L)$ — tensiunile la bornele laturilor ;

— *sistemul de ecuații trebuie completat cu încă L ecuații pentru a putea fi rezolvat.*

Dacă circuitul este liniar, sistemul se completează cu L ecuații liniare între perechile de mărimi I_m și U_m. Astfel, de exemplu, *dacă circuitul are numai rezistoare și surse de tensiune*, ecuațiile de legătură sînt :

$$E_m + U_m = R_m \ I_m \ (m = 1, 2, \ldots, L),$$

scrise pentru toate cele L laturi. Aceste ecuații includ și situațiile particulare în care latura este alcătuită numai dintr-un rezistor (cînd se va considera $E_m = 0$) sau numai dintr-o sursă de t.e.m. (cînd se va considera $R_m = 0$). Pentru un astfel de circuit, prin aplicarea teoremelor Kirchhoff se obține sistemul :

$$\begin{cases} \sum\limits_{k \in A} \pm I_k = 0 \quad (a = 1, 2, \ldots, (N-1)) ; \\ \sum\limits_{m \in P} \pm E_m = \sum\limits_{m \in P} \pm R_m I_m \ (p = 1, 2, \ldots, (L-N+1)), \end{cases} \tag{3.28}$$

alcătuit din L ecuații, cu tot atîtea necunoscute : curenții $I_1, I_2, \ldots, I_L$ prin cele L laturi.

Dacă circuitul are și surse de curent, atunci :

— fiecare sursă de curent determină curentul prin latura respectivă, adică reduce numărul curenților necunoscuți cu o unitate, dar adaugă o nouă necunoscută, tensiunea la bornele sursei ;

— numărul de ochiuri pe care se poate scrie a doua teoremă a lui Kirchhoff în forma sa particulară se reduce, dar, pentru ochiurile rămase se poate aplica a doua teoremă a lui Kirchhoff în forma sa generală. Prin ur-

mare, și în acest caz rezultă un sistem de L ecuații cu L necunoscute, care sînt toate tensiunile la bornele generatoarelor de curent și toate intensitățile curenților prin laturile de circuit care nu conțin surse de curent.

Să urmărim parcurgerea acestor etape prin analiza a două circuite de curent continuu.

Aplicația 1. *Să se determine intensitățile curenților debitați de cele două surse de t.e.m. ale circuitului din figura 3.51, în care* $E_1 = 19$ V, $E_2 = 7$ V, $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$.

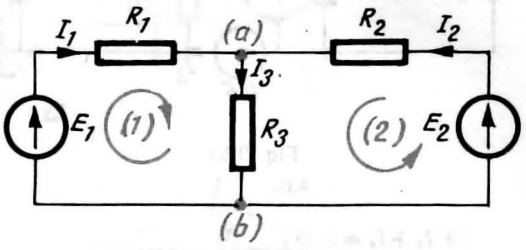


Fig. 3.51

Stabilirea sistemului de ecuații. Circuitul are $L = 3$ laturi, $N = 2$ noduri și deci $O = L - N + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$ ochiuri independente. Alegem sensurile celor trei curenți. Alegem ochiurile și precizăm sensurile lor de parcurgere. Putem acum trece la aplicarea teoremelor lui Kirchhoff. Se obțin trei ecuații:

(a) $I_1 + I_2 = I_3$;
(1) $E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3$;
(2) $E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3$.

Efectuînd înlocuirile numerice se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3; \\ 19 = 2I_1 + 3I_3; \\ 7 = I_2 + 3I_3. \end{cases}$$

S-a încheiat astfel prima etapă, prin obținerea unui sistem de trei ecuații necunoscute: cei trei curenți.

Să rezolvăm acest sistem. Se elimină intensitatea I_3, substituind expresia acesteia din prima ecuație în celelalte două ecuații:
Se obține sistemul:

$$\begin{cases} 19 = 2I_1 + 3(I_1 + I_2) = 5I_1 + 3I_2; \\ 7 = I_2 + 3(I_1 + I_2) = 3I_1 + 4I_2, \end{cases}$$

care are două ecuații cu două necunoscute. Să rezolvăm acest ultim sistem (de exemplu, prin metoda reducerii). Vom obține:

$$I_1 = 5\ \text{A}, \quad I_2 = -2\ \text{A}.$$

Rezolvarea sistemului de ecuații (a doua etapă) se încheie cu determinarea curentului I_3, din prima ecuație.

Rezultă:

$$I_3 = 5 - 2 = 3\text{A}.$$

Cu valorile cunoscute ale intensităților curenților se pot întocmi diagramele orientate de curenți și, respectiv, de tensiuni (fig. 3.52).

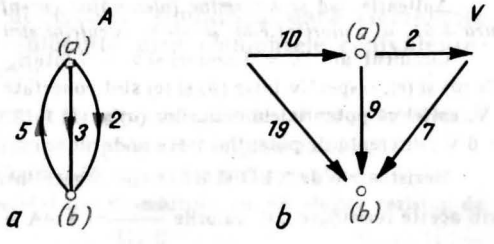


Fig. 3.52

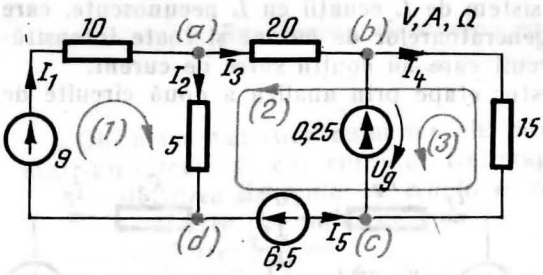


Fig. 3.53

Aplicația 2. *În circuitul din figura 3.53 valorile tensiunilor electromotoare ale surselor de tensiune, intensității curentului sursei de curent și valorile rezistențelor sînt indicate direct în dreptul elementelor respective. Să se efectueze analiza circuitului.*

Deoarece $L = 6$ și $N = 4$ se vor scrie trei ecuații de curenți și trei ecuații de tensiuni. Se obține sistemul:

(a) $I_1 = I_2 + I_3$;
(b) $I_3 + 0{,}25 = I_4$;
(c) $I_4 + I_5 = 0{,}25$;
(1) $9 = 10\,I_1 + 5I_2$;
$(2) -6{,}5 = 5I_2 - 15I_4 - 20I_3$
(3) $U_g - 15I_4 = 0$.

Diagramele de curenți și tensiuni sînt reprezentate în figurile 3.54, *a*, *b*, avînd soluțiile marcate pe figuri în amperi și respectiv în volți.

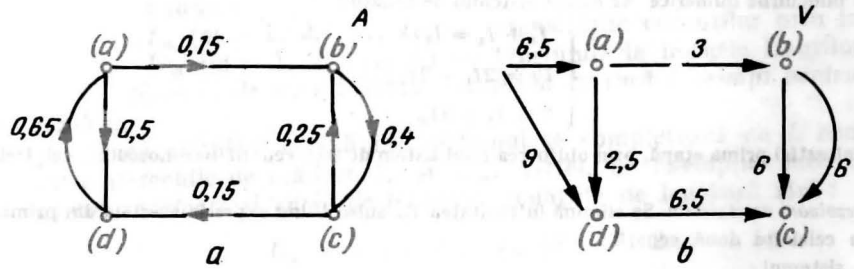


Fig. 3.54

O serie de circuite liniare pot fi analizate direct, întocmind concomitent cele două diagrame, de curenți și de tensiune. Să urmărim acest mod de analiză printr-o aplicație.

Aplicație. *Să se determine intensitățile curenților prin laturile circuitului reprezentat în figura 3.55, a. Valorile t.e.m. și ale rezistențelor sînt notate direct pe schemă.*

Circuitul are $N = 3$ noduri și $L = 7$ laturi. Nodul (c) este conectat la masă. Între nodurile (a) și (c), respectiv între (b) și (c) sînt conectate cele două surse cu t.e.m., de 12 V și respectiv 6 V, astfel că potențialele nodurilor (a) și (b) față de masă sînt cunoscute: $V_a = 12$ V și $V_b = 6$ V; diferența de potențial între nodurile (a) și (b) este $V_a - V_b = 6$ V (fig. 3.55, *b*).

Rezistoarele de 3 kΩ și 6 kΩ sînt legate între nodul (a) și masă. Intensitățile curenților prin aceste rezistoare au valorile $\frac{12\text{ V}}{3\text{ k}\Omega} = 4$ mA și respectiv $\frac{12\text{ V}}{6\text{ k}\Omega} = 2$ mA. Similar se calculează curenții prin rezistorul de 1 kΩ legat între nodul (b) și masă, precum și prin rezistoarele de 2 kΩ și 6 kΩ legate între nodurile (a) și (b) (fig. 3.55, *c*). Curenții debitați de sursele de t.e.m. rezultă

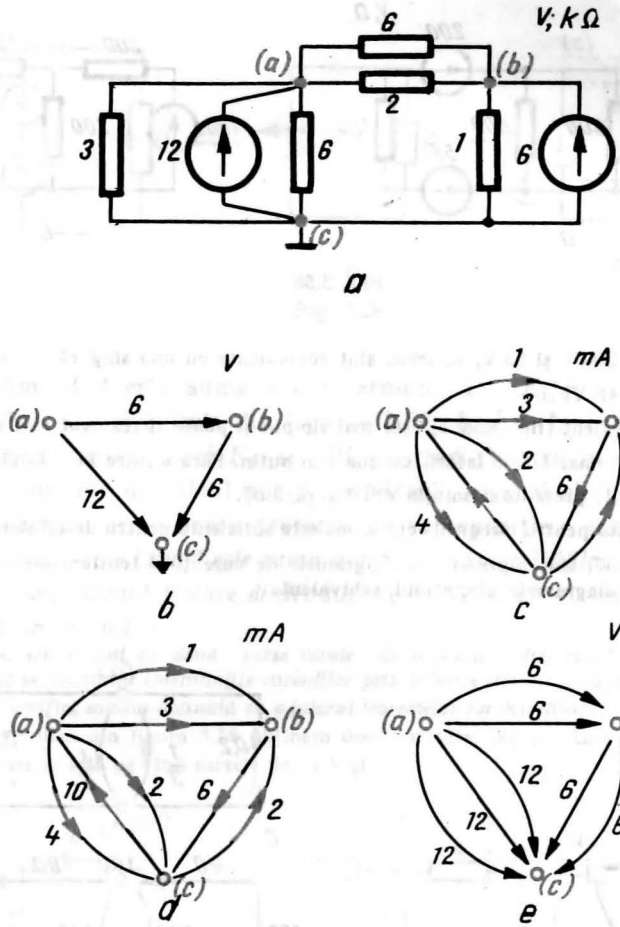


Fig. 3.55

prin aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff pentru nodurile *a* și *b* ; astfel că diagrama de curenți este completă (fig. 3.55, *d*). Diagrama de tensiuni completă (dig. 3.55, *e*) justifică valorile curenților obținuți în diagrama de curenți.

Adesea, rezolvarea unui circuit de c.c. se simplifică dacă elementele conectate în serie sau în paralel sînt înlocuite prin elementele echivalente. Să exemplificăm aceasta pe un exemplu.

Aplicație. *Să se determine căderea de tensiune la bornele rezistorului de 150 Ω și intensitatea curentului prin rezistorul de 300 Ω din circuitul de c.c. reprezentat în figura 3.56, a.*

Circuitul dat poate fi echivalat cu cel din figura 3.56, *b* dacă se ține cont că :

— rezistoarele de 100 Ω și 200 Ω sînt în serie și sînt echivalente cu un singur rezistor de 300 Ω ;

— rezistoarele de 300 Ω și 600 Ω sînt legate în paralel și sînt echivalente cu un rezistor de 200 Ω ;

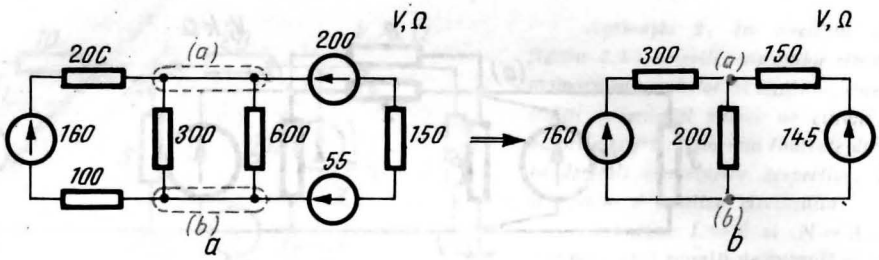


Fig. 3.56

— sursele de 200 V și 55 V, în serie, sînt echivalente cu una singură, cu sensul celei de 200 V, de valoare 145 V.

Circuitul echivalent (fig. 3.56, *b*) este mai simplu și poate fi rezolvat mai ușor. Are tot $N = 2$ noduri, dar numai $L = 3$ laturi, cu una mai puțin. Fără a intra în detaliile de rezolvare a acestui nou circuit, prezentăm soluția din figura 3.57.

Soluția obținută pentru circuitul echivalent este suficientă pentru determinarea mărimilor cerute. În figura 3.57, sînt reprezentate diagramele de curenți și tensiuni ale circuitului dat, deduse direct din diagramele circuitului echivalent.

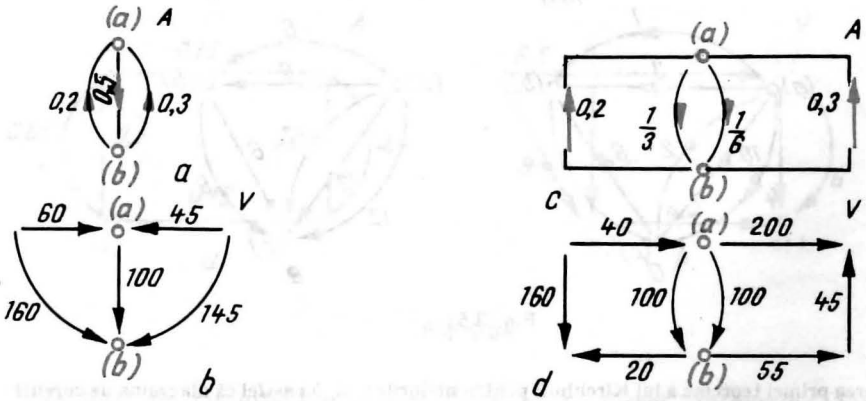


Fig. 3.57

3. Metode și teoreme de rezolvare a circuitelor liniare de curent continuu

a. *Metoda superpoziției*

Considerăm circuitul din figura 3.58, *a*. Intensitatea curentului prin circuit este:

$$I = \frac{E_1}{R} + \frac{E_2}{R}.$$

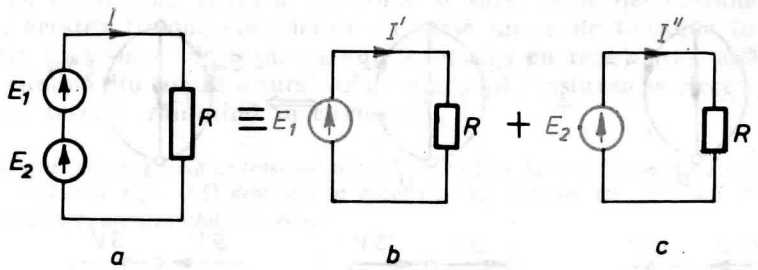


Fig. 3.58

Observăm că I este suma a doi termeni, $I' = E_1/R$ și $I'' = E_2/R$, ce pot fi calculați din circuitele din figurile 3.58, *b* și *c*, în care fiecare dintre cele două surse ideale, E_1 și E_2, se află pe rînd singură în circuit.

Această metodă de calcul poate fi aplicată oricărui circuit liniar, pentru care este valabilă următoarea **teoremă de superpoziție :** *intensitatea curentului electric prin orice latură este suma algebrică a intensităților curenților pe care i-ar stabili în acea latură fiecare dintre sursele de t.e.m. ale circuitului, dacă s-ar afla singură în circuit.*

Aplicație. *Un circuit cu două surse ideale de tensiune și trei rezistoare are schema din figura 3.59. Să se determine intensitățile curenților prin laturile circuitului aplicînd teorema superpoziției și să se verifice soluția obținută cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff.*

Pentru circuitul din figura 3.59 obținem două circuite, reprezentate de asemenea în figura 3.59, în care se află pe rînd sursele de 24 V și 18 V.

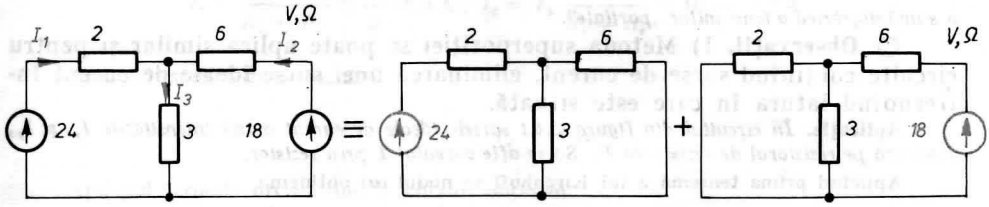


Fig. 3.59

Circuitul cu sursa de 24 V poate fi rezolvat determinînd mai întîi rezistența echivalentă față de bornele sursei :

$$R_e = 2 + \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 4\ \Omega.$$

Curentul debitat de sursă are intensitatea 24 V/4 Ω = 6 A. Față de acest curent, rezistoarele de 3 Ω și 6 Ω formează un divizor, astfel că 3/(3 + 6) = 1/3 din curent, adică 2 A trece prin rezistorul de 6 Ω, restul de 4 A închizîndu-se prin rezistorul de 3 Ω. Aceste rezultate sînt cuprinse în diagramele din figura 3.60, *a*. Un calcul similar conduce la valorile reprezentate în figura 3,60, *b*, pentru circuitul cu sursa de 18 V.

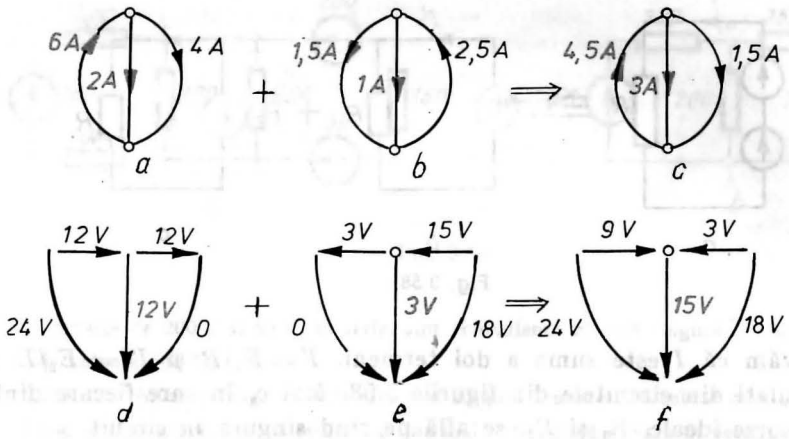


Fig. 3.60

Curenţii reali pot fi acum calculaţi efectuînd sumarea algebrică a curenţilor corespunzători din cele două circuite. Astfel, curenţii „parţiali" de 2 A şi 1 A, stabiliţi prin rezistorul de 3 Ω de sursa de 24 V, respectiv de cea de 18 V, au acelaşi sens prin rezistor şi deci curentul real, cu acelaşi sens, este efectiv suma lor, $2 + 1 = 3$ A. Curenţii „parţiali" prin rezistorul de 2 Ω au însă sensuri opuse. În consecinţă, curentul real este dat de diferenţa lor, $6 - 1{,}5 = 4{,}5$ A şi va avea sensul curentului mai mare, adică al celui de 6 A. Soluţia corespunzătoare circuitului dat prin enunţ este reprezentată în figura 3.60, *c*.

Compararea diagramelor de tensiuni pentru cele trei circuite (fig. 3.60, *d*, *e*, *f*) arată că *nu numai orice curent este suma algebrică a curenţilor „parţiali", ci şi orice tensiune la borne este o sumă algebrică a tensiunilor „parţiale"*.

○ **Observaţii.** 1) Metoda superpoziţiei se poate aplica similar şi pentru circuite conţinînd surse de curent, eliminarea unei surse ideale de curent întrerupînd latura în care este situată.

Aplicaţie. *În circuitul din figura 3.61 sursele ideale de curent avînd intensităţile I_{g1} şi I_{g2} debitează pe rezistorul de rezistenţă R. Să se afle curentul I prin rezistor.*

Aplicînd prima teoremă a lui Kirchhoff în nodul (*a*) obţinem:

$$I = I_{g1} + I_{g2},$$

adică superpoziţia curenţilor care corespund schemelor din figura 3.61, *b*.

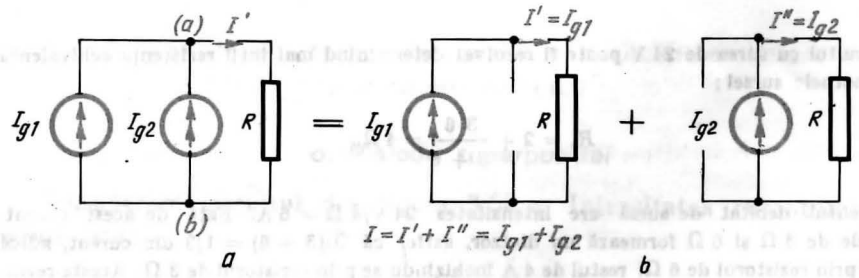


Fig. 3.61

2) În cazul cînd circuitul cuprinde şi surse reale de tensiune (sau de curent), acestea trebuie considerate ca surse ideale de tensiune în serie cu rezistoare (sau surse ideale de curent în paralel cu rezistoare), astfel încît, cînd se elimină din circuit o sursă anulăm de fapt tensiunea sa electromotoare, rezistenţa internă rămînînd în circuit.

Aplicaţie. *O sursă reală de tensiune avînd* $E = 10$ *V şi* $R_i = 1\ \Omega$ *şi o sursă reală de curent avînd* $I_g = 10$ *A şi* $R_g = 2\ \Omega$ *debitează în paralel pe un receptor cu rezistenţa* $R = 2\ \Omega$. *Se cere intensitatea* I_R *a curentului din receptor.*

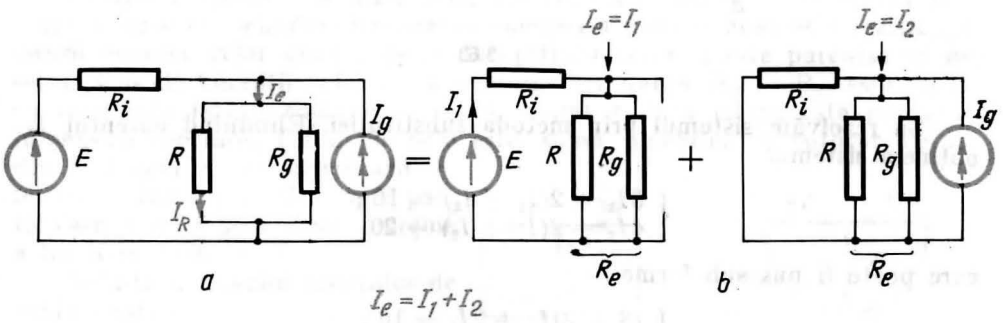


Fig. 3.62

În figura 3.62 se prezintă schema circuitului şi cele două circuite cu cîte o singură sursă, aşa cum cere teorema superpoziţiei. Obţinem mai întîi:

$$I_1 = \frac{E}{R_i + R_e} = \frac{10}{2} = 5\ \text{A}\ ;\quad I_2 = I_g \frac{R_i}{R_i + R_e} = 10\,\frac{1}{2} = 5\ \text{A}.$$

Aplicînd superpoziţia rezultă:

$$I_e = I_1 + I_2 = 10\ \text{A}.$$

Aplicînd formula divizorului de curent, obţinem:

$$I_R = I_e \frac{R_g}{R_i + R_g} = 10\,\frac{2}{2+2} = 5\ \text{A}.$$

b. *Metoda curenţilor de ochiuri (ciclici)*

Considerăm circuitul din figura 3.63, *a*. Prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff obţinem sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3\ ; \\ 8I_1 + 2I_3 = 16\ ; \\ 4I_2 + 2I_3 = 20 \end{cases}$$

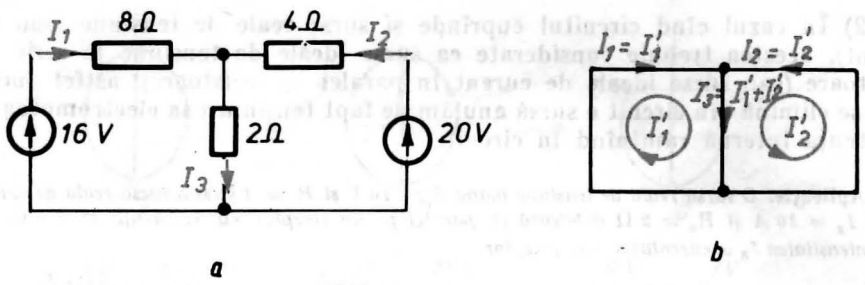


Fig. 3.63

Să rezolvăm sistemul prin metoda substituției. Eliminînd curentul I_3 obținem sistemul

$$\begin{cases} 8I_1 + 2(I_1 + I_2) = 16\,; \\ 4I_2 + 2(I_1 + I_2) + 20, \end{cases}$$

care poate fi pus sub forma :

$$\begin{cases} (8 + 2)I_1 + 2I_2 = 16\,; \\ 2I_1 + (4 + 2)I_2 = 20. \end{cases}$$

Din a doua ecuație deducem :

$$I_1 = \frac{20 - 6\,I_2}{2} = 10 - 3I_2,$$

care, înlocuit în prima ecuație, dă :

$$10(10 - 3I_2) + 2I_2 = 16\,; \quad I_2 = \frac{84}{28} = 3 \text{ A}.$$

Calculînd și ceilalți curenți, obținem :

$$I_1 = 1 \text{ A și } I_3 = 4 \text{ A}.$$

Reducerea numărului de ecuații, obținută prin metoda substituției, poate fi realizată direct prin alegerea unor noi necunoscute, astfel încît prima teoremă a lui Kirchhoff să fie automat satisfăcută. Noile necunoscute sînt curenți fictivi, numiți *curenți de ochiuri* sau *curenți ciclici* ; fiecare parcurge toate laturile ce alcătuiesc un ochi independent.

Să admitem că prin cele două ochiuri ale circuitului din figura 3.63, *b* circulă curenții de ochiuri I_1' și I_2' ,cu sensurile din figură. Curenții reali prin laturile circuitului pot fi exprimați în funcție de acești curenți fictivi. Astfel $I_1 = I_1'$, $I_2 = I_2'$, iar $I_3 = I_1' + I_2'$, deoarece prin latura a treia trec în același sens ambii curenți de ochiuri.

Aplicînd a doua teoremă a lui Kirchhoff pe cele două ochiuri, obținem :

$$\begin{cases} 8I_1' + 2(I_1' + I_2') = 16\,; \\ 4I_2 + 2(I_1' + I_2') = 20, \end{cases}$$

adică :

$$\begin{cases} (8 + 2)I_1' + 2I_2' = 16\,; \\ 2I_1' + (4 + 2)I_2' = 20. \end{cases}$$

Acest sistem este identic cu cel obținut mai sus, prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff, după substituirea curentului I_3. Sistemul admite însă o interpretare diferită. Astfel observăm că ecuațiile curenților de ochiuri au forma :

$$\begin{cases} R_{11}I_1' + R_{12}I_2' = E_1' ; \\ R_{21}I_1' + R_{22}I_2' = E_2', \end{cases} \tag{3.29}$$

unde R_{11} și R_{22} se numesc *rezistențele proprii ale ochiurilor*, $R_{12} = R_{21}$ este *rezistența comună a ochiurilor*, iar E_1' și E_2' sînt *t.e.m. de ochiuri*.

Rezistența proprie a unui ochi, întotdeauna pozitivă, este suma rezistențelor laturilor ochiului. Rezistența comună a două ochiuri este rezistența laturii comune celor două ochiuri dacă latura comună este parcursă în același sens de curenții celor două ochiuri. Rezistența $R_{12} = R_{21}$ este egală cu rezistența laturii comune cu semn schimbat dacă latura este parcursă în sensuri contrare. T.e.m. de ochi este suma algebrică a tuturor t.e.m. din acel ochi și se calculează la fel ca în cazul scrierii formei particulare a celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff.

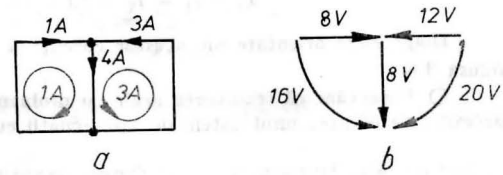


Fig. 3.64

Soluția sistemului ecuațiilor de ochiuri este :

$$I_1' = 1 \text{ A} ; \; I_2' = 3 \text{ A}$$

și poate fi verificată întocmind diagramele de tensiuni și curenți (fig. 3.64).

Aplicație. *Considerăm circuitul în punte din figura 3.65, avînd valorile mărimilor marcate pe circuit. Să determinăm curenții aplicînd metoda curenților de ochiuri.*

Circuitul are $L = 6$, $N = 4$ deci $O = L - N + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$ ochiuri independente. Fie I_1', I_2' și I_3' curenții ciclici asociați acestor ochiuri alese ca în figură.

Ecuațiile generale pentru trei ochiuri se vor scrie :

$$\begin{cases} R_{11}I_1' + R_{12}I_2' + R_{13}I_3' = E_1' ; \\ R_{21}I_1' + R_{22}I_2' + R_{23}I_3' = E_2' ; \\ R_{31}I_1' + R_{32}I_2' + R_{33}I_3' = E_3', \end{cases}$$

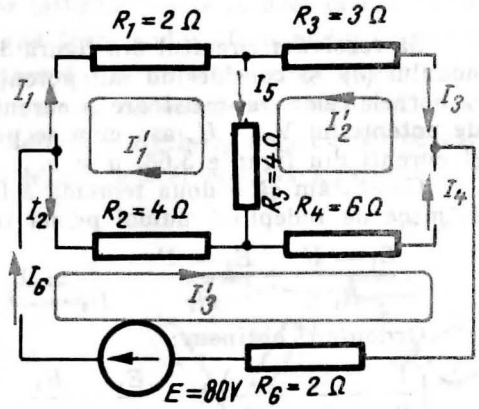


Fig. 3.65

în care, în conformitate cu regulile stabilite mai sus, vom avea

$R_{11} = R_1 + R_5 + R_2 = 10 \; \Omega$; $R_{22} = R_3 + R_4 + R_5 = 13 \; \Omega$; $R_{33} = R_2 + R_4 + R_6 = 12 \; \Omega$;

$R_{12} = R_{21} = R_5 = 4\Omega$; $R_{13} = R_{31} = -R_2 = -4 \; \Omega$; $R_{23} = R_{32} = R_4 = 6 \; \Omega$;

$E_1' = 0$; $E_2' = 0$; $E_3' = E = 80$ V.

○ **Observație.** $R_{13} = R_{31} = -R_2 < 0$ deoarece latura 2 este parcursă în sens opus de I_1' și I_3'.

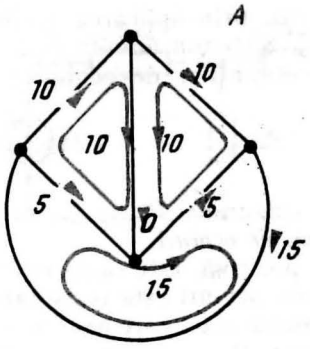


Fig. 3.66

Substituind în ecuații obținem :

$$10I_1' + 4I_2' - 4I_3' = 0;$$

$$4I_1' + 13I_2' + 6I_3' = 0;$$

$$-4I_1' + 6I_2' + 12I_3' = 80.$$

Rezultă :

$$I_1' = 10\text{ A} = -I_2';\ I_3' = 15\text{ A}.$$

Intensitățile curenților din laturi rezultă din suprapoziția curenților ciclici care parcurg laturile :

$$I_1 = I_1' = 10\text{ A}.$$

$$I_2 = -I_1' + I_3' = -10 + 15 = 5\text{ A};\ I_3 = -I_2' = 10\text{ A};$$

$$I_4 = I_2' + I_3' = -10 + 15 = 5\text{ A};$$

$$I_5 = I_1' + I_2' = 10 - 10 = 0;\ I_6 = I_3' = 15\text{ A}.$$

Diagramele orientate ale acestor curenți și ale curenților de ochiuri sînt prezentate în figura 3.66.

○ **Observăm** că rezolvarea aceleiași probleme cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff ar fi necesitat rezolvarea unui sistem de șase ecuații cu șase necunoscute.

c. *Metoda potențialelor nodurilor*

Să rezolvăm circuitul din figura 3.67 alegînd ca necunoscută potențialul nodului (a), și considerînd nul potențialul nodului (b) ($V_b = 0$). Tensiunile la bornele celor trei rezistoare și curenții prin ele pot fi exprimați în funcție de potențialul $V_a = U$, așa cum se poate urmări pe diagramele de tensiuni și curenți din figurile 3.68, a și b.

Constatăm că a doua teoremă a lui Kirchhoff este automat satisfăcută Rămîne de îndeplinit numai prima teoremă a lui Kirchhoff, adică :

$$\frac{E_1 - U}{R_1} + \frac{E_2 - U}{R_2} - \frac{U}{R_3} = 0.$$

Ordonînd, obținem :

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) U = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}.$$

Cu valorile numerice date (fig. 3.67.):

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) U = \frac{16}{8} + \frac{20}{4},$$

de unde rezultă :

$$U = 8\text{ V}.$$

Notînd nodul cu indicele *1*, ecuația obținută se poate pune sub forma :

$$G_{11} U_1 = I_{sc\,1}.$$

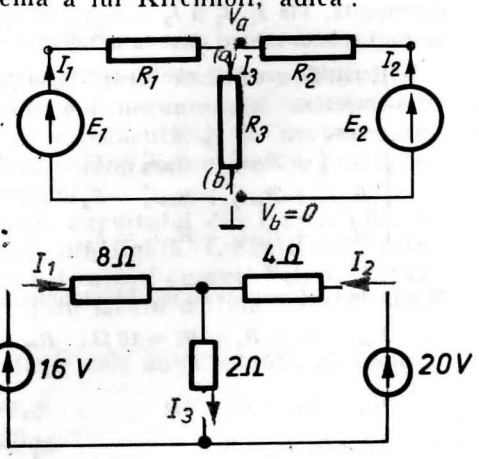


Fig. 3.67

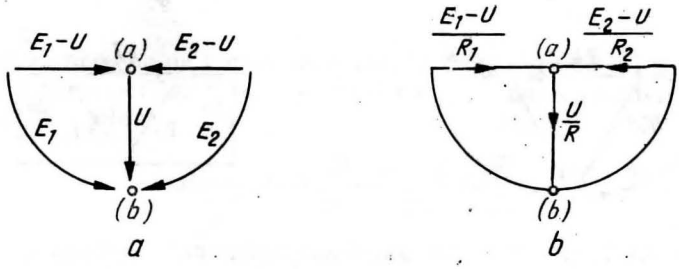


Fig. 3.68

Dacă circuitul ar fi avut trei noduri, atunci notînd cu V_1 și V_2 potențialele nodurilor (*1*) și (*2*), și alegînd $V_3 = 0$, s-ar fi obținut similar un sistem de două ecuații :

$$\begin{cases} G_{11}U_1 + G_{12}U_2 = I_{sc\,1}\,; \\ G_{21}U_1 + G_{22}U_2 = I_{sc\,2}, \end{cases}$$

unde tensiunile U_1 și U_2 sînt respectiv egale cu potențialele V_1 și V_2 ($U_1 = V_1 - V_3$; $U_2 = V_2 - V_3$).

Conductanțele G_{11} și G_{22} se numesc *conductanțele proprii ale nodurilor.* Ca și mai sus, o conductanță proprie a unui nod, întotdeauna pozitivă, se calculează făcînd suma conductanțelor laturilor legate la acel nod. Conductanța $G_{12} = G_{21}$ este *conductanța comună* între nodul (*1*) și nodul (*2*), egală cu suma cu semn schimbat a conductanțelor laturilor ce leagă direct nodurile (*1*) și (*2*). Curenții $I_{sc\,1}$ și $I_{sc\,2}$ se numesc *curenți de scurtcircuit.* Un curent de scurtcircuit se calculează prin adunarea algebrică a curenților pe care i-ar injecta în nod sursele din laturile legate la acel nod, dacă laturile ar fi scurtcircuitate la borne.

Aplicație. *Să se rezolve circuitul din figura 3.69 cu ajutorul metodei tensiunilor la noduri.*

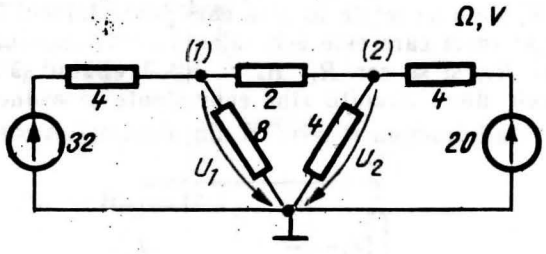


Fig. 3.69

Ecuațiile tensiunilor la noduri sînt :

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right)U_1 - \frac{1}{2}U_2 = \frac{32}{4}\,;$$

$$-\frac{1}{2}U_1 + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)U_2 = \frac{20}{4},$$

adică :

$$\frac{7}{8}U_1 - \frac{1}{2}U_2 = 8\,;$$

$$-\frac{1}{2}U_1 + U_2 = 5.$$

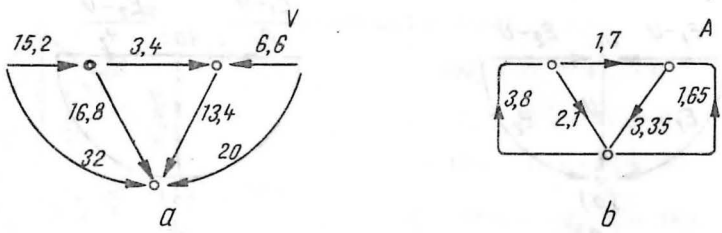


Fig. 3.70

Rezolvînd sistem obținem :

$$U_1 = 16{,}8 \text{ V} \quad \text{și} \quad U_2 = 5 + \frac{U_1}{2} = 13{,}4 \text{ V}.$$

Calculăm curenții și înlocuim diagramele din figura 3.70, mai întîi cea de tensiuni și apoi cea de curenți.

Deoarece teoremele lui Kirchhoff sînt verificate identic, soluția obținută este cea corectă.

d. *Metode de transfigurare*

A transfigura un circuit înseamnă a-l transforma într-un circuit echivalent cu el. De exemplu, un lanț de rezistoare legate în serie poate fi substituit printr-un singur rezistor avînd rezistența egală cu suma rezistențelor rezistoarelor ; un generator real de tensiune se poate echivala cu un generator real de curent ș.a.m.d. În electrotehnică, metodele de transfigurare se utilizează pentru simplificarea circuitelor și ușurarea studiului lor.

● **Transfigurarea triunghi-stea și stea-triunghi.** Circuitul din figura 3.71, *a*, se numește *circuit în stea*, iar cel din figura 3.71, *b* se numește *circuit în triunghi*. Elementele lor sînt R_1, R_2, R_3 (pentru stea) și R_{12}, R_{23} și R_{31} (pentru triunghi).

A transfigura triunghiul în stea înseamnă a găsi elementele R_1, R_2 și R_3 ale unei rețele în stea care poate înlocui în orice condiții rețeaua în triunghi (deci care este echivalentă cu triunghiul). Prin urmare, se dau R_{12}, R_{23} și R_{31} și se cer R_1, R_2 și R_3. Trebuind să fie echivalente în orice condiții, cele două circuite sînt echivalente și atunci cînd se alimentează numai la

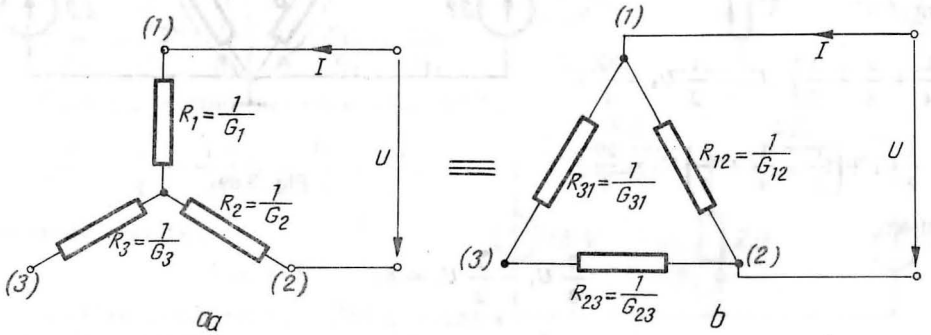


Fig. 3.71

cîte o singură pereche de borne, de exemplu între bornele (*1*) și (*2*), borna (*3*) fiind în gol (liberă) (fig. 3.71). În acest caz cele două rezistențe echivalente trebuie să fie egale :

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

În mod analog, alimentînd pe la bornele (*2*), (*3*) și (*3*, (*1*) se obțin :

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}};$$

$$R_3 + R_1 = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Adunînd cele trei ecuații obținem :

$$R_1 + R_2 + R_3 = \frac{R_{12}R_{23} + R_{23}R_{31} + R_{31}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Scăzînd pe rînd din această relație cîte una dintre ecuațiile precedente, obținem :

$$\boxed{R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}};$$

$$\boxed{R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}}; \qquad (3.30)$$

$$\boxed{R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}}.$$

Pentru cazul particular în care rezistențele din laturile triunghiului sînt egale :

$$R_{12} = R_{23} = R_{31} = R_\Delta,$$

se obține :

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_\curlywedge = \frac{R_\Delta}{3}.$$

Aplicație. *Se dă triunghiul cu* $R_{12} = 2\ \Omega$, $R_{23} = 3\ \Omega$ *și* $R_{31} = 5\ \Omega$; *se cer rezistențele stelei echivalente.*

Obținem, cu relațiile de mai sus :

$$R_1 = 1\ \Omega;$$

$$R_2 = 0{,}6\ \Omega;$$

$$R_3 = 1{,}5\ \Omega.$$

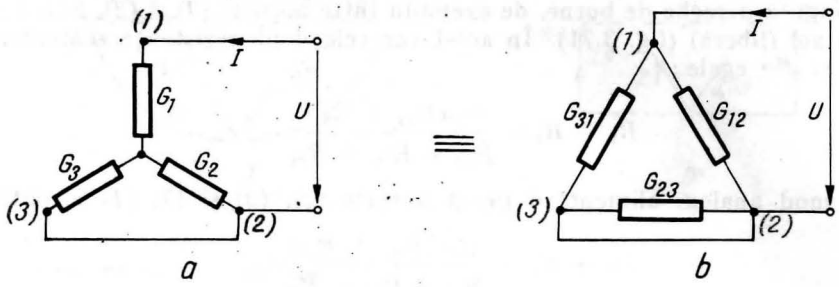


Fig. 3.72

Pentru a transfigura steaua în triunghi, alimentăm pe rînd cele două rețele ca în figura 3.72, de exemplu pe la bornele (*1*) și (*2*) cu bornele (*2*) și (*3*) în scurtcircuit. Calculăm conductanțele echivalente, care trebuie să fie egale ; obținem succesiv :

$$G_{12} + G_{31} = \frac{G_1(G_2 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3};$$

$$G_{23} + G_{12} = \frac{G_2(G_3 + G_1)}{G_1 + G_2 + G_3};$$

$$G_{31} + G_{23} = \frac{G_3(G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

Rezolvînd acest sistem de ecuații ca și în cazul precedent, obținem :

$$\boxed{G_{12} = \frac{G_1G_2}{G_1 + G_2 + G_3}};$$

$$\boxed{G_{23} = \frac{G_2G_3}{G_1 + G_2 + G_3}}; \qquad (3.31)$$

$$\boxed{G_{31} = \frac{G_3G_1}{G_1 + G_2 + G_3}}.$$

Pentru cazul particular în care conductanțele circuitului în stea sînt egale :

$$G_1 = G_2 = G_3 = G_\curlywedge = \frac{1}{R_\curlywedge},$$

obținem :

$$G_{12} = G_{23} = G_{31} = \frac{1}{R_\Delta} = \frac{G_\curlywedge}{3} = \frac{1}{3R_\curlywedge},$$

de unde rezultă $R_\curlywedge = \frac{R_\Delta}{3}$, ca și în aplicația anterioară.

Aplicația 1. *Se dă steaua cu $G_1 = 0,2$ S, $G_2 = 0,3$ S și $G_3 = 0,5$ S ; se cer elementele triunghiului echivalent.*

$$G_{12} = \frac{0,2 \times 0,3}{0,2 + 0,3 + 1,5} = 0,06 \text{ S}; \quad G_{23} = \frac{0,15}{1} = 0,15 \text{ S}; \quad G_{31} = \frac{0,1}{1} = 0,2 \text{ S}.$$

Rezultă și :

$$R_{12} = \frac{50}{3}\ \Omega; \quad R_{23} = \frac{20}{3}\ \Omega; \quad R_{31} = 5\ \Omega.$$

Aplicația 2. *Se dă rețeaua în punte din figura 3.73, în care valorile rezistențelor sînt indicate pe figură. Se cere să se calculeze curentul debitat de sursă.*

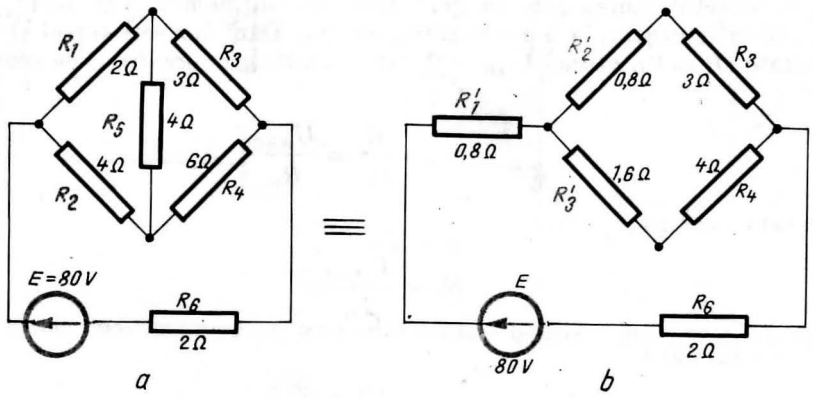


Fig. 3.73

Transfigurăm triunghiul format din rezistoarele R_1 ; R_2 și R_5 în stea și obținem rețeaua din figură, în care :

$$R_1' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_5} = \frac{2 \times 4}{10} = 0,8\ \Omega;$$

$$R_2' = \frac{R_2 R_5}{R_1 + R_2 + R_5} = \frac{2 \times 4}{10} = 0,8\ \Omega;$$

$$R_3' = \frac{R_1 R_5}{R_1 + R_2 + R_5} = \frac{4 \times 4}{10} = 1,6\ \Omega.$$

Rezistența echivalentă a circuitului astfel obținut este simplu de calculat :

$$R_e = R_6 + R_1' + \frac{(R_2' + R_3)(R_3' + R_4)}{R_2' + R_3 + R_3' + R_4} = 2 + 0,8 + \frac{(0,8 + 3)(1,6 + 6)}{0,8 + 3 + 1,6 + 6} = \frac{16}{3}\ \Omega;$$

$$I = I_6 = \frac{E}{R_e} = \frac{80}{\frac{16}{3}} = 15 \text{ A}.$$

Se obține același rezultat ca la aplicația privind curenții de ochiuri, dar mult mai rapid.

● **Transfigurarea rețelelor în generatoare echivalente.**

Generatorul echivalent de tensiune ; teorema Helmholtz-Thévenin. Considerăm o sursă avînd t.e.m. E și rezistența internă R_i, care alimentează un receptor de rezistență R.

Conform legii lui Ohm, intensitatea curentului va fi :

$$I = \frac{E}{R + R_i}.$$

Ne punem următoarea întrebare : dacă nu se cunosc parametrii sursei, ce încercări (măsurări) ar trebui să facem pentru a putea calcula intensitatea curentului pentru orice receptor R dat ? Observăm că dacă receptorul este deconectat (sursa este în gol : $R = \infty$) obținem $I = 0$, iar $U_{ABO} = E$, U_{ABO} fiind tensiunea la bornele sursei în gol. Dacă bornele sursei sînt scurtcircuitate ($R = 0$), atunci $U_{AB} = 0$, iar intensitatea curentului de scurtcircuit va fi

$$I_{sc} = \frac{E}{R_i} = \frac{U_{ABO}}{R_i}.$$

Deducem deci că :

$$R_i = \frac{U_{ABO}}{I_{sc}}.$$

Obținem așadar :

$$I = \frac{U_{ABO}}{R + \dfrac{U_{ABO}}{I_{sc}}}$$

adică este suficient să măsurăm tensiunea de mers în gol U_{ABO} și intensitatea curentului de scurtcircuit. Observăm însă că R_i este rezistența sursei pasivizate, adică rezistența ce se obține anulînd t.e.m. (păstrînd numai rezistența internă). Această rezistență o notăm cu R_{ABO}. Obținem deci :

$$I = \frac{U_{ABO}}{R + R_{ABO}}.$$

Această relație exprimă **teorema lui Helmholtz și Thévenin** și este foarte generala în sensul următor : *dacă la două borne A, B ale unei rețele liniare active conectăm un receptor R, atunci intensitatea curentului din latura AB se calculează cu relația :*

$$\boxed{I_{AB} = \frac{U_{ABO}}{R + R_{ABO}}} \qquad (3.72)$$

unde :

U_{ABO} este tensiunea ce se stabilește la bornele A, B cînd se scoate din circuit rezistența R (funcționare în gol) ;

R_{ABO} — rezistența rețelei pasivizate față de bornele A, B, adică rezistența rețelei (mai puțin latura AB) cînd se anulează t.e.m. ale surselor, păstrînd rezistențele lor interne.

Aplicație. *Considerăm două generatoare reale (fig. 3.74, a) legate în paralel și debitînd pe un rezistor de rezistență R. Se cere intensitatea curentului* I_{AB}.

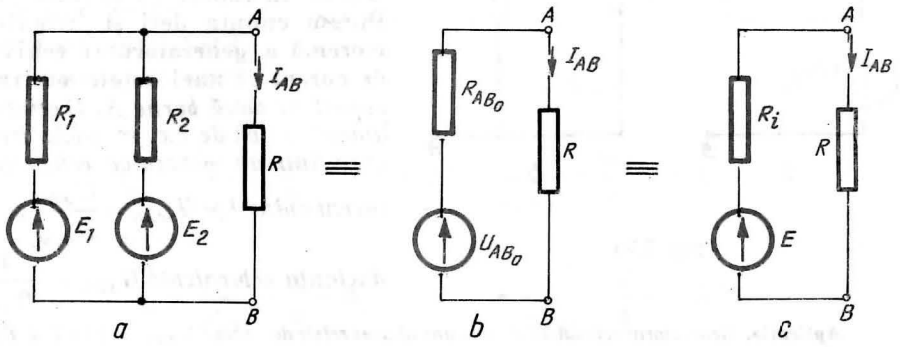


Fig. 3.74

Aplicînd transfigurarea generatoarelor de tensiune în paralel (fig. 3.74, *b*) obținem:

$$U_{ABO} = \frac{E_1R_2 + E_2R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{și} \quad R_{ABO} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

Rezultă:

$$I_{AB} = \frac{\dfrac{E_1R_2 + E_2R_1}{R_1 + R_2}}{R + \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{E_1R_2 + E_2R_1}{RR_1 + RR_2 + R_1R_2}.$$

Aplicație numerică: $E_1 = E_2 = 10$ V; $R_1 = R_2 = 1\ \Omega$; $R = 9{,}5\ \Omega$.
Se obține:

$$I_{AB} = \frac{10}{9{,}5 + 0{,}5} = 1 \text{ A}.$$

Formula lui Helmholtz și Thèvenin sugerează schema echivalentă din figura 3.74, *c*, în care $E = U_{ABO}$ și $R_i = R_{ABO}$. Această schemă echivalentă activă se numește *generatorul echivalent de tensiune al circuitului în raport cu bornele A,B.*

Putem enunța deci următoarea **teoremă a generatorului echivalent de tensiune al unei rețele active;** *în raport cu două borne A,B, orice rețea liniară activă de curent continuu se poate transfigura într-un generator echivalent de tensiune avînd t.e.m.* $E = U_{ABO}$ *și rezistența internă* $R_i = R_{ABO}$.

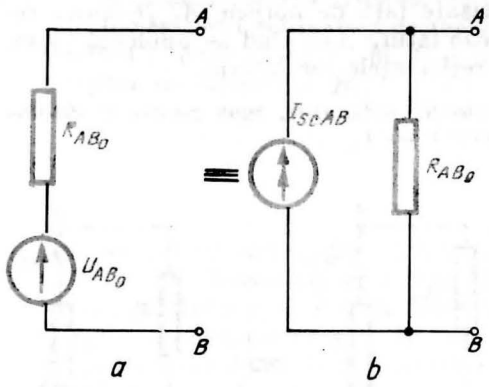


Fig. 3.75

Generatorul echivalent de curent ; teorema lui Norton. Transfigurînd generatorul echivalent de tensiune în generator echivalent de curent (fig. 3.75), obţinem generatorul echivalent de curent al reţelei în raport cu bornele *A*, *B*. Putem enunţa deci şi următoarea **teoremă a generatorului echivalent de curent al unei reţele active:** *în raport cu două borne A, B orice reţea liniară activă de c.c. se poate transfigura într-un generator echivalent de curent avînd* $I_g = I_{scAB} = \dfrac{U_{ABO}}{R_{ABO}}$ *şi conductanţa echivalentă* $G_{ABO} = \dfrac{1}{R_{ABO}}$.

Aplicaţie. *Generatorul echivalent de tensiune al unei reţele de c.c. are* $U_{ABO} = 100$ *V şi* $R_{ABO} = 10\ \Omega$. *Să se determine generatorul echivalent de curent.*

$$I_g = \frac{U_{ABO}}{R_{ALO}} = \frac{100}{10} = 10\text{ A}\ ;\ G_{ABO} = \frac{1}{R_{ABO}} = \frac{1}{10} = 0{,}1\text{ S}.$$

Considerăm generatorul echivalent de curent al unei reţele care debitează pe un receptor de conductanţă $G = \dfrac{1}{R}$. Să calculăm tensiunea U_{AB} la bornele receptorului.

$$U_{AB} = RI_{AB} = \frac{1}{G} \cdot I_{AB}.$$

Folosind teorema divizorului de curent, obţinem :

$$I_{AB} = I_{AB\,sc}\frac{R_{ABO}}{R + R_{ABO}} = I_{AB\,sc}\frac{G}{G_{ABO} + G}.$$

Înlocuind în expresia tensiunii, obţinem :

$$\boxed{U_{AB} = \frac{I_{AB\,sc}}{G + G_{ABO}}}\ . \qquad (3.33)$$

Această relaţie exprimă matematic **teorema lui Norton**, care se enunţă astfel : *tensiunea la bornele unei laturi pasive de conductanţă G conectate între bornele A, B ale unei reţele liniare active de c.c. este egală cu raportul dintre intensitate curentului care se stabileşte la scurtcircuitarea bornelor şi suma dintre conductanţa G a laturii şi conductanţa* G_{ABO} *a reţelei pasivizate faţă de bornele A, B.*

Aplicația 1. *Două rețele avînd* $U'_{ABO} = 100$ V, $R'_{ABO} = 2\ \Omega$ *și* $U''_{ABO} = 200$ V *și* $R''_{ABO} = 4\Omega$ *debitează în paralel pe latura* AB *de rezistență* $R = 4\ \Omega$ *(fig. 3.76). Să se determine tensiunea* U_{AB} *și intensitatea curentului din latură.*

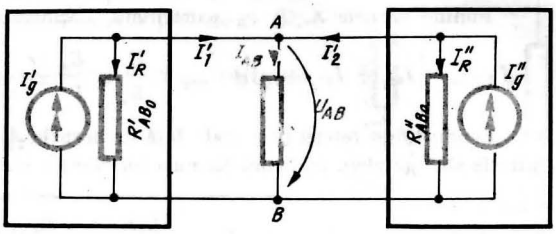


Fig. 3.76

Considerăm generatoarele echivalente de curent avînd parametrii:

$$I'_g = \frac{U'_{ABO}}{R'_{ABO}} = \frac{100}{2} = 50 \text{ A} \text{ și } I''_g = \frac{U''_{ABO}}{R''_{ABO}} = \frac{200}{4} = 50 \text{ A}.$$

Conductanțele lor vor fi:

$$G'_{ABO} = \frac{1}{R'_{ABO}} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ S} \text{ și } G''_{ABO} = \frac{1}{R''_{ABO}} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ S}.$$

Intensitatea curentului de scurtcircuit (fig. 3.76) va fi:

$$I_{sc\,AB} = I'_g + I''_g = 50 + 50 = 100 \text{ A},$$

conductanța rețelei pasivizate va fi:

$$G_{ABO} = G'_{ABO} + G''_{ABO} = 0{,}75 \text{ S},$$

iar conductanța laturii AB va fi:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ S}.$$

Aplicînd formula lui Norton obținem:

$$U_{AB} = \frac{100}{0{,}25 + 0{,}75} = 100 \text{ V} \text{ și } I_{AB} = GU_{AB} = 0{,}25 \times 100 = 25 \text{ A}.$$

○ **Observație.** Din schema din figura 3.76 mai rezultă:

$$I'_R = \frac{U_{AB}}{R'_{ABO}} = \frac{100}{2} = 50 \text{ A} \text{ și } I''_R = \frac{U_{AB}}{R''_{ABO}} = \frac{100}{4} = 25 \text{ A},$$

deci prima rețea nu debitează curent în receptor.

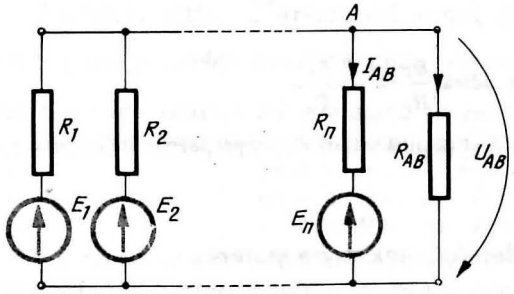


Fig. 3.77

Aplicația 2. *În rețeaua din figura 3.77,* n *generatoare reale de tensiune diferită avînd t.e.m.* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *și rezistențele interne* $R_1, R_2, \ldots R_n$ *debitează în comun pe latura* AB *de rezistență* R_{AB}. Se cere tensiunea la bornele laturii.

Rezolvăm problema cu formula lui Norton.

Punînd bornele A, B în scurtcircuit, obținem evident:

$$I_{AB\,sc} = I_{sc_1} + I_{sc_2} + \ldots + I_{sc_n} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \ldots + \frac{E_n}{R_n} = E_1G_1 + E_2G_2 + \ldots + E_nG_n.$$

Conductanța rețelei pasivizate față de bornele A, B în gol va fi $G_{AB0} = G_1 + G_2 + \ldots + G_n$ (laturile sînt paralel). Aplicînd formula lui Norton obținem:

$$U_{AB} = \frac{G_1E_1 + G_2E_2 + \ldots + G_nE_n}{G_1 + G_2 + \ldots + G_n + G_{AB}} \tag{3.34}$$

Această relație mai este cunoscută și sub denumirea de *formula lui Millmann*.

Pentru cazul particular în care

$$E_1 = E_2 = \ldots = E_n, G_1 = G_2 = \ldots = G_n = G = \frac{1}{R},$$

se obține:

$$U_{AB} = \frac{nGE}{nG + G_{AB}} = \frac{GE}{G + \frac{G_{AB}}{n}} = \frac{R_{AB}E}{R_{AB} + \frac{R}{n}}$$

și deci:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB}}{R} = \frac{E}{R_{AB} + \frac{R}{n}},$$

relație cunoscută de la legarea surselor de tensiune identice în paralel.

Aplicația 3. *Două surse reale funcționînd în paralel alimentează un receptor de rezistență R. Ce relație trebuie să existe între t.e.m. ale surselor și rezistențele lor interne pentru ca prin receptor să nu treacă curent?*

Deoarece:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB}}{R} = 0 \Rightarrow U_{AB} = 0.$$

Din formula lui Millmann rezultă:

$$U_{AB} = \frac{G_1E_1 + G_2E_2}{G_1 + G_2 + G} = 0 \Rightarrow G_1E_1 + G_2E_2 = 0$$

sau

$$\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} = 0, \text{ adică } \frac{E_1}{R_1} = -\frac{E_2}{R_2}.$$

T.e.m. trebuie să fie orientate în opoziție și să aibă valori direct proporționale cu rezistențele lor interne.

e. *Teorema transferului maxim de putere*

● **Puterea maximă absorbită de receptor.** Considerăm o sursă reală de tensiune, avînd t.e.m. E și rezistența internă R_i, care debitează pe un re-

ceptor de rezistență R (fig. 3.78). Presupunînd că sursa este dată, se pune întrebarea în ce situație puterea absorbită de receptor va fi maximă.

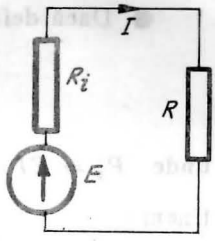


Fig. 3.78

Pentru a răspunde la întrebare, considerăm puterea absorbită de receptor:

$$P = RI^2.$$

Conform legii lui Ohm:

$$I = \frac{E}{R + R_i},$$

astfel că puterea se exprimă prin:

$$P = \frac{RE^2}{(R + R_i)^2} = \frac{E^2}{\left(\frac{R_i}{\sqrt{R}} + \sqrt{R}\right)^2}.$$

T.e.m. E fiind dată, puterea va fi maximă cînd numitorul va fi minim. Pentru a găsi minimul numitorului, observăm că produsul termenilor este constant:

$$\frac{R_i}{\sqrt{R}} \cdot \sqrt{R} = R_i.$$

Din matematică se știe că dintre toate perechile de numere al căror produs este constant, suma numerelor e minimă cînd ele sînt egale: (de ex. $1 \times 16 = 2 \times 8 = 4 \times 4 \rightarrow 4 + 4 < 2 + 8 < 1 + 16$). Prin urmare, deoarece produsul termenilor din paranteza de la numitor este constant, suma lor va fi minimă cînd ei sînt egali:

$$\frac{R_i}{\sqrt{R}} = \sqrt{R} \rightarrow \boxed{R = R_i}$$

În acest caz puterea maximă va fi:

$$\boxed{P_{max} = \frac{E^2}{4\,R_i}} \qquad (3.35)$$

Ajungem astfel la următorul enunț al **teoremei transferului maxim de putere**: *un generator transferă unui rezistor o putere maximă* $\frac{E^2}{4\,R_i}$ *atunci cînd rezistența rezistorului este egală cu rezistența internă a generatorului.*

Putem reprezenta puterea ca funcție de R, (fig. 3.79), observînd că:

pentru $R = 0$, $P = 0$;
pentru $R = R_i$, $P = P_{max}$;
pentru $R = \infty$, $P = 0$.

Un receptor care satisface condiția de transfer maxim de putere se numește *adaptat* sursei. Adaptarea receptoarelor se utilizează de obicei în tehnica semnalelor (radiotehnică, televiziune etc.).

● Dacă definim **randamentul transferului energiei** ca :

$$\eta = \frac{P\Delta t}{P_g \Delta t} = \frac{P}{P_g},$$

unde $P_g = EI = \dfrac{E^2}{R + R_i}$ este puterea totală dezvoltată de sursă, obținem :

$$\eta = \frac{RE^2}{(R + R_i)^2} \Big/ \frac{E^2}{R + R_i} = \frac{R}{(R + R_i)}.$$

Se observă că *randamentul este cu atît mai mare cu cît* $R_i \ll R$. Pentru $P = P_{max}$, $R = R_i$ și se obține randamentul

$$\eta(P)|_{P_{max}} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%.$$

Acest rezultat este natural deoarece atunci cînd rezistența receptorului este egală cu rezistența internă a sursei, acestea fiind străbătute de același curent disipă puteri egale $RI^2 = R_i I^2$ și deci puterea dezvoltată de sursă se consumă jumătate în sursă și jumătate în receptor.

În tehnica energiei electrice (centrale, rețele etc.) randamentul de 50% este total nesatisfăcător și deci receptoarele nu se adaptează surselor.

Aplicația 1. *O sursă avînd t.e.m.* $E = 50$ V *și* $R_i = 0{,}5\ \Omega$ *debitează pe un receptor adaptat de rezistență* R. *Să se determine* R *și* P_{max}.

$$R = R_i = 0{,}5\ \Omega\ ;\ P_{max} = \frac{E^2}{4R_i} = \frac{2\,500}{4 \times 0{,}5} = 1\,250\ \text{W}.$$

Aplicația 2. *Două surse reale de tensiune avînd* $E_1 = 50$ V ; $E_2 = 100$ V ; $R_{i1} = 1\ \Omega$ *și* $R_{i2} = 2\ \Omega$ *debitează pe un receptor adaptat. Să se determine* R *și* P_{max}.

Generatorul echivalent va avea :

$$E = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2}{G_1 + G_2} = \frac{\dfrac{50}{1} + \dfrac{100}{2}}{\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2}} = \frac{100}{1{,}5}\ \text{V};$$

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1 \cdot 2}{3} = \frac{2}{3}\ \Omega.$$

Deci :

$$R = R_i = \frac{2}{3}\ \Omega\ ;$$

$$P_{max} = \frac{E^2}{4R_i} = \frac{\left(\dfrac{100}{1{,}5}\right)^2}{\dfrac{8}{3}} = 1\,667\ \text{W}.$$

Aplicația 3. *O sursă avînd* $E = 100$ V *și* $R_i = 1\ \Omega$ *debitează pe un receptor puterea* $P = 1\,000$ W. *Să se determine rezistența receptorului și randamentul transferului.*

Scriem :

$$P = \frac{RE^2}{(R + R_i)^2}.$$

Din această relație rezultă ecuația de gradul 2

$$PR^2 + (2PR_i - E^2)R + PR_i^2 = 0,$$

avînd soluțiile :

$$R = -\frac{2PR_i - E^2}{2P} \pm \sqrt{\left(\frac{2PR_i - E^2}{2P}\right)^2 - R_i^2}.$$

Ecuația are soluții reale numai dacă discriminantul este nenegativ, adică dacă este îndeplinită condiția :

$$(2PR_i - E^2)^2 - 4P^2R_i^2 \geqslant 0.$$

Dezvoltînd și simplificînd cu $E^2 > 0$ obținem :

$$\frac{E^2}{4R_i} = P_{max} \geqslant P > 0.$$

În cazul nostru,

$$P_{max} = \frac{E^2}{4R_i} = \frac{100^2}{4} = 2\,500 > 1\,000 = P.$$

Deci problema are două soluții :

$$R' = 7{,}87\ \Omega\ ;\ R'' = 0{,}127\ \Omega.$$

Cele două randamente vor fi :

$$\eta' = \frac{7{,}87}{1 + 7{,}87} = 0{,}88\ (88\%)\ ;\ \eta'' = \frac{0{,}127}{1 + 0{,}127} = 0{,}11\ (11\%).$$

Aceste două soluții sînt evidențiate clar în figura 3.79, unde dreapta $P = const$ taie curba $P = f(R)$ în două puncte, A' și A'', cărora le corespund $R' = 0{,}127\ \Omega$ și $R'' = 7{,}87\ \Omega$.

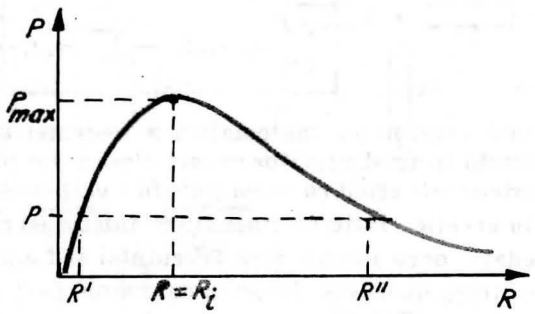


Fig. 3.79

f. *Teorema conservării puterilor*

Considerăm o sursă de tensiune avînd t.e.m. E și rezistența internă R_i, care debitează pe un receptor de rezistență R. Conform legii lui Ohm vom putea scrie :

$$E = R_iI + RI.$$

Înmulțind cu I obținem :

$$EI = R_i I^2 + RI^2,$$

sau

$$P_g = P_i + P,$$

unde :

P_g este puterea dezvoltată de sursă ;
P_i — puterea disipată în rezistență internă a sursei ;
P — puterea absorbită de receptor.

Mai luăm în considerare exemplul din figura 3.80 pentru care, aplicînd a doua teoremă a lui Kirchhoff, obținem :

$$E_1 - E_2 = R_1 I + R_2 I$$

sau, înmulțind cu I :

$$E_1 I - E_2 I = R_1 I^2 + R_2 I_2^2,$$

respectiv

$$P_{1g} - P_{2g} = P_1 + P_2$$

sau

$$P_{1g} = P_{2g} + P_1 + P_2.$$

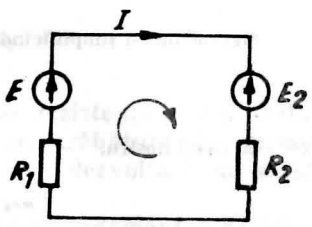


Fig. 3.80

Observăm că în primul caz puterea dezvoltată de generator este disipată în rezistența sa internă și în receptor. În cel de-al doilea caz, puterea dezvoltată de primul generator acoperă puterile disipate în rezistoare și puterea primită de cel de-al doilea generator.

Aceste relații se numesc *relații de conservare a puterilor* sau *relații de bilanț de puteri*. Ele se pot generaliza pentru o rețea cu L laturi active :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{L} \pm E_k I_k = \sum_{k=1}^{L} R_k I_k^2} \qquad (3.36)$$

și reprezintă exprimarea matematică a **teoremei de conservare a puterilor**, care se enunță în felul următor : *suma algebrică a puterilor dezvoltate de sursele de tensiune este egală cu suma puterilor disipate în rezistențele rețelei.*

○ **Observație.** Puterea unei surse intervine cu semnul (+), adică este efectiv cedată, dacă intensitatea curentului și t.e.m. sînt pozitive și coincid ca sens ; puterea unei surse intervin cu semnul (—), adică este efectiv primită, dacă intensitatea curentului și t.e.m. sînt pozitive și opuse ca sens ; puterile disipate în rezistențe (inclusiv în rezistențele interne ale surselor) sînt întotdeauna pozitive.

De regulă, pentru a verifica corectitudinea rezolvării unui circuit electric se alcătuiește relația de bilanț de puteri. Neverificarea bilanțului arată cu siguranță că rezolvarea este incorectă.

Aplicație. *În rețeaua din figura 3.81, prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff s-au obținut* $I_1 = 1\ A$, $I_2 = 2\ A$ *și* $I_3 = 3\ A$ *cu sensurile din figură. Să aplicăm teorema conservării puterilor.*

$$E_1I_1 + E_2I_2 - E_3I_3 = R_1I_1^2 + R_2I_2^2 + R_3I_3^2.$$

Făcînd înlocuirile, obținem:

$$20 \times 1 + 10 \times 2 - 2 \times 3 = 12 \times 1^2 + 1 \times 2^2 + 2 \times 3^2,$$

adică

$$34\ W = 34\ W.$$

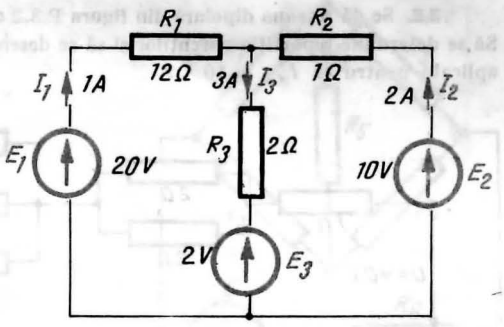


Fig. 3.81

Bilanțul de puteri se verifică. Observăm că numai sursele E_1 și E_2 dezvoltă energie, în timp ce E_3 consumă energie.

Probleme

3.1. Să se calculeze rezistențele echivalente ale rețelelor dipolare din figura P.3.1.

R: *a)* 2 Ω; *b)* 2 Ω; *c)* 10 Ω;

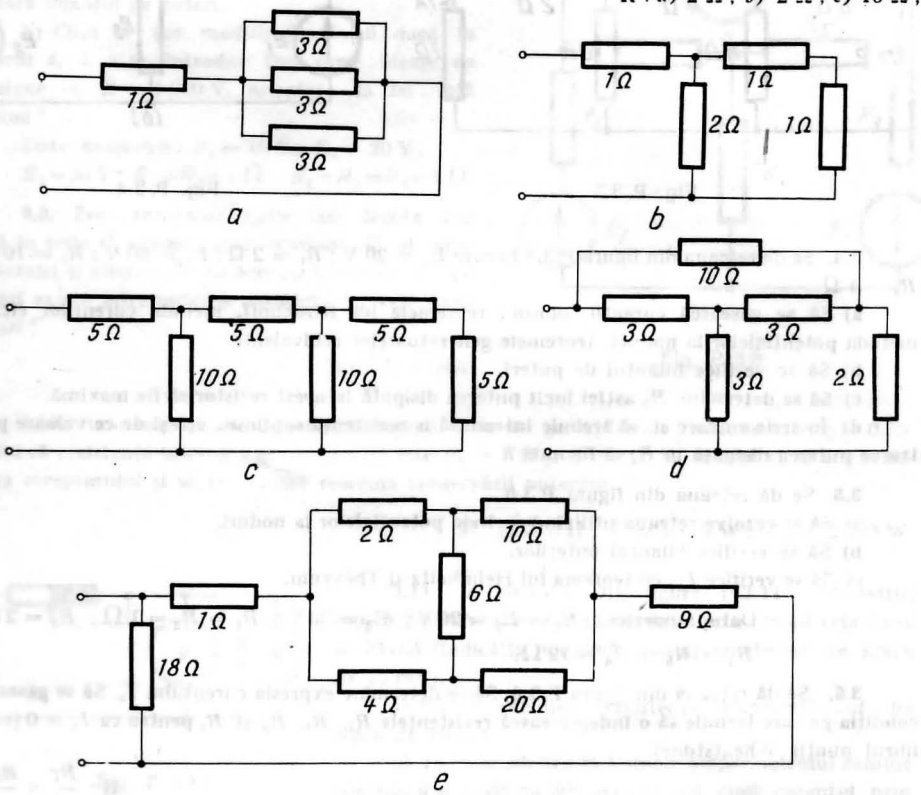


Fig. P. 3.1

3.2. Se dă rețeaua dipolară din figura P.3.2 căreia i se aplică la borne tensiunea $U=40$ V. Să se determine repartiția curenților și să se deseneze diagrama orientată. Ce tensiune ar trebui aplicată pentru ca $I_{AB} = 10$ A ?

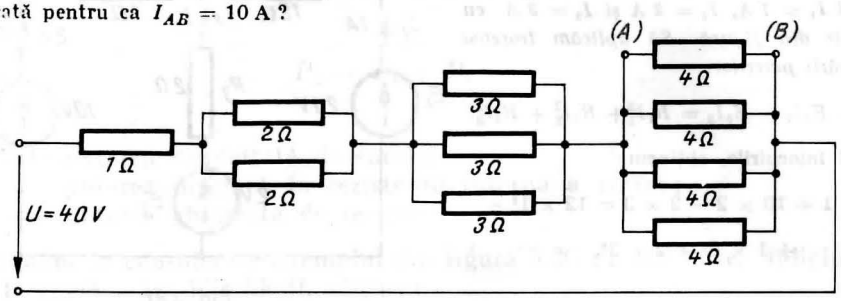


Fig. P. 3.2

3.3. Se dă rețeaua din figura P.3.3 în care $I_5 = 1$ A. Se cer ceilalți curenți și tensiunea ce trebuie aplicată la borne.

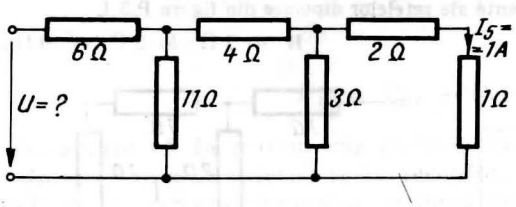


Fig. P. 3.3

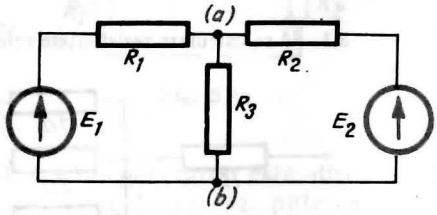


Fig. P. 3.4

3.4. Se dă rețeaua din figura P.3.4 în care $E_1 = 20$ V ; $R_1 = 2\ \Omega$; $E_2 = 60$ V ; $R_2 = 10\ \Omega$; $R_3 = 1\ \Omega$.

a) Să se găsească curenții folosind teoremele lui Kirchhoff, metoda curenților ciclici, metoda potențialelor la noduri, teoremele generatoarelor echivalente.

b) Să se verifice bilanțul de puteri.

c) Să se determine R_3 astfel încît puterea disipată în acest rezistor să fie maximă.

d) În serie cu care sursă trebuie introdusă o rezistență suplimentară și de ce valoare pentru ca puterea disipată în R_3 să fie nulă ?

3.5. Se dă rețeaua din figura P.3.5.

a) Să se rezolve rețeaua utilizînd metoda potențialelor la noduri.

b) Să se verifice bilanțul puterilor.

c) Să se verifice I_{ab} cu teorema lui Helmholtz și Thévenin.

Date numerice : $E_1 = E_2 = 20$ V ; $E_3 = 30$ V ; $R_1 = R_3 = 1\ \Omega$; $R_2 = 2\ \Omega$; $R_4 = R_5 = R_6 = 12\ \Omega$.

3.6. Se dă rețeaua din figura P.3.6. Să se determine expresia curentului I_5. Să se găsească condiția pe care trebuie să o îndeplinească rezistențele R_1, R_2, R_3 și R_4 pentru ca $I_5 = 0$ (echilibrul punții Wheatstone).

R: $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{R_3}{R_4}$.

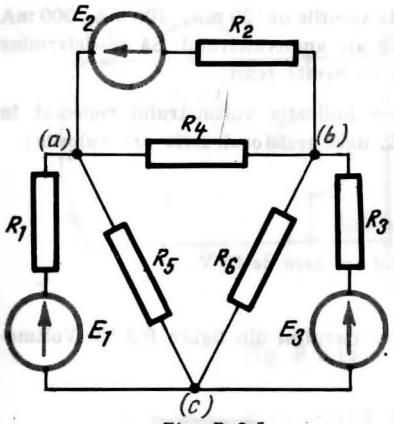


Fig. P. 3.5

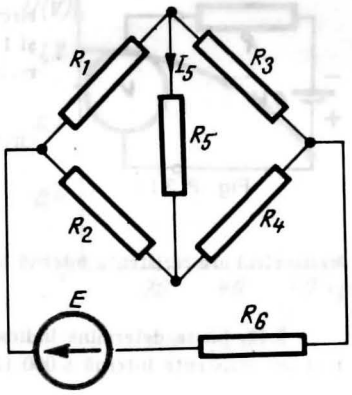


Fig. P. 3.6

3.7. Știind că $R_1 = 10\ \Omega$; $R_2 = 20\ \Omega$; $R_3 = 30\ \Omega$; $E = 40$ V și că puntea este în echilibru, să se determine R_4 și intensitățile curenților ; să se verifice teorema conservării puterilor.

3.8. Se dă rețeaua din figura P.3.8.

a) Să se determine curenții și să se întocmească bilanțul de puteri.

b) Cum se vor modifica curenții dacă în laturile *4*, *5*, *6* se introduc trei surse ideale de tensiune cu $E = 1\,000$ V, orientate la fel față de nod ?

Date numerice : $E_1 = 10$ V ; $E_2 = 20$ V ;
$E_3 = 30$ V ; $R_1 = R_3 = 1\ \Omega$; $R_4 = R_5 = R_6 = 6\ \Omega$.

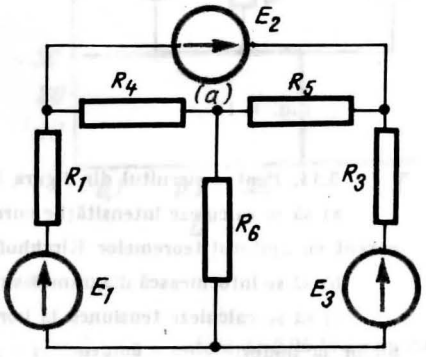


Fig. P. 3.8

3.9. Zece rezistoare egale sînt legate mai întîi în serie și supuse unei tensiuni U și apoi în paralel și alimentate cu aceeași tensiune U. Ce raport există între puterile absorbite în cele două cazuri ?

R : $\dfrac{P_s}{P_p} = 100$.

3.10. Randamentul de transfer al puterii de la un generator de tensiune este $\eta = 0{,}75$. Știind că rezistența internă a generatorului este $R_i = 1\ \Omega$ și $E = 100$ V, se cere să se afle rezistența receptorului și să se verifice teorema conservării puterilor.

R : $R = 3\ \Omega$; $P = 1\,875$ W ; $P_p = 2\,500$ W.

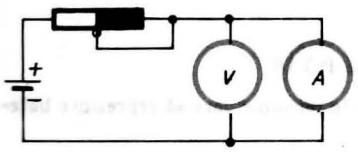


Fig. P. 3.11

3.11. În circuitul din figura P.3.11 voltmetrul indică 300 mV atunci cînd curentul prin circuit este fixat la 10 mA (indicația maximă a ampermetrului pe scara de 10 mA).

a) Să se calculeze rezistența ampermetrului pe scara de 10 mA.

b) Dacă tensiunea la bornele ampermetrului rămîne constantă și egală cu 300 mV, atunci cînd curentul prin

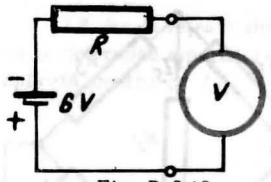


Fig. P. 3.12

circuit este fixat pe rînd la valorile de 30 mA, 100 mA, 300 mA și 1 A pe scările respective ale ampermetrului. Să se determine rezistența ampermetrului pe aceste scări.

3.12. Să se determine indicația voltmetrului conectat în circuitul din figura P.3.12, dacă rezistorul serie are valorile :

a) $R = 0{,}06\ \Omega$;

b) $R = 60\ \Omega$;

c) $R = 60\ \text{k}\Omega$.

Voltmetrul are rezistența internă 5 000 Ω/V și este utilizat pe scara de 12 V.

3.13. Să se determine indicația voltmetrului pentru circuitul din figura P.3.13. Voltmetrul are rezistența internă 5 000 Ω/V.

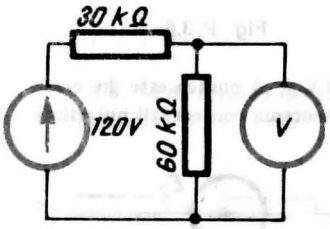


Fig. P. 13

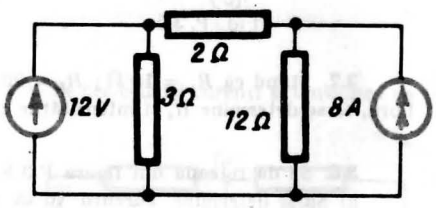


Fig. P. 3.14

3.14. Pentru circuitul din figura P.3.14 se cere :

a) să se calculeze intensitățile curenților în laturi și tensiunea la bornele generatorului de curent cu ajutorul teoremelor Kirchhoff :

b) să se întocmească diagramele orientate de curenți și tensiuni ;

c) să se calculeze tensiunea la bornele rezistorului de 12 Ω cu ajutorul teoremei potențialelor la noduri.

3.15. Un voltmetru V și un ampermetru A conectate ca în figura P.3.15 măsoară tensiunea la borne și intensitatea curentului printr-un dispozitiv electronic de circuit. Să se specifice dacă puterea este primită sau cedată de dispozitiv atunci cînd :

a) indicațiile instrumentelor sînt pozitive ;

b) ampermetrul indică o valoare negativă, iar voltmetrul o valoare pozitivă ;

c) ampermetrul indică o valoare pozitivă, iar voltmetrul o valoare negativă ;

d) indicațiile instrumentelor sînt negative.

3.16. O baterie solară are caracteristica dată în figura P.3.16 :

a) să se determine un model liniar de dipol generator de tensiune care să reprezinte bateria pentru curenți pînă la 40 mA ;

b) dacă bateria va alimenta un rezistor de 25 Ω să se calculeze curentul debitat.

Soluția obținută cu ajutorul modelului va fi verificată pe grafic.

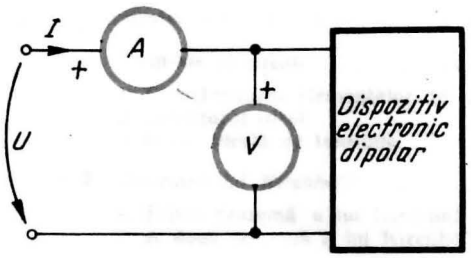


Fig. P. 3.15

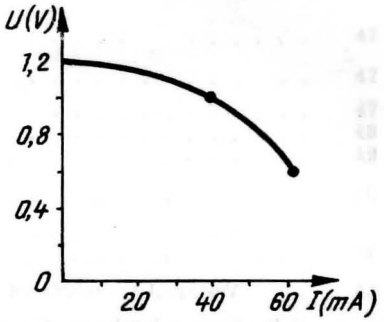


Fig. P. 3.16

3.17. O sursă electronică stabilizată cu protecție la scurtcircuit are caracteristica tensiune-curent reprezentată în figura P.3.17, *b*. Ce model de circuit se poate adopta dacă:

a) $100\ \Omega < R < 300\ \Omega$;

b) $10\ \Omega < R <, 40\ \Omega$.

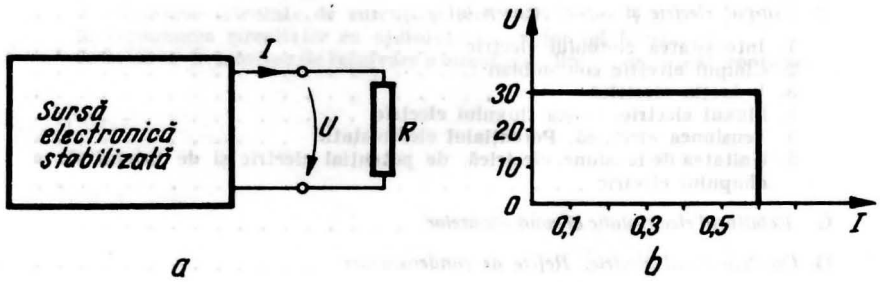


Fig. P. 3.17

3.18. O bobină, alimentată de la o sursă de c.c. consumă o putere de 0,25 W la un curent cu intensitatea de 10 mA. Să se calculeze rezistența bobinei.

Se va ține seama că în curent continuu puterea primită prin borne de o bobină este chiar puterea disipată în rezistența firului bobinei.

CUPRINS

Cap. 1. **Electrotehnica regimului electrostatic** 3

A. *Sarcina electrică și forța lui Coulomb* 3

1. Sarcina electrică 3
2. Forța lui Coulomb 3
3. Unitatea de sarcină electrică 4
4. Electrizarea corpurilor 5

B. *Cîmpul electric și caracterizarea lui* 7

1. Intensitatea cîmpului electric 7
2. Cîmpul electric coulombian 7
3. Inducția electrică 9
4. Fluxul electric. Legea fluxului electric 10
5. Tensiunea electrică. Potențialul electrostatic 11
6. Unitatea de tensiune electrică, de potențial electric și de intensitate a cîmpului electric 14

C. *Echilibrul electrostatic al conductoarelor* 16

D. *Condensatorul electric. Rețele de condensatoare* 17

1. Capacitatea electrică 17
2. Legarea condensatoarelor în serie 19
3. Legarea condensatoarelor în paralel 20
4. Legarea mixtă a condensatoarelor 21

E. *Forțele electrostatice. Energia electrostatică* 22

1. Forța electrostatică 22
2. Energia electrostatică 24

Cap. 2. **Electrotehnica regimului electrocinetic staționar** 29

A. *Starea electrocinetică și caracterizarea ei* 29

1. Starea electrocinetică a conductoarelor 29
2. Curentul electric de conducție. Intensitatea curentului electric de conducție 29
3. Densitatea curentului electric de conducție 32

B. *Legile electrocineticii* 34

1. Legea lui Ohm 34
2. Unități de măsură pentru rezistență, rezistivitate, conductanță și conductivitate 36
3. Interpretarea microscopică a legii lui Ohm 37
4. Legea lui Joule 39
5. Interpretarea microscopică a legii lui Joule 39
6. Generatoare electrice (surse electrice) 40
7. Energia electrică dezvoltată de generator 44
8. Legea conservării sarcinii electrice 45

Cap. 3. Electrotehnica circuitelor de curent continuu 47

A. *Elemente de circuit* 47

1. Caracterizarea elementelor de circuit 47
2. Rezistorul ideal 48
3. Sursa ideală de tensiune 49

B. *Teoremele lui Kirchhoff* 50

1. Prima teoremă a lui Kirchhoff 51
2. A doua teoremă a lui Kirchhoff 51

C. *Studiul circuitelor electrice dipolare cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff* . . . 53

1. Reguli de asociere a sensurilor de referinţă ale curentului şi tensiunii la borne 53
2. Conexiunile rezistoarelor 54
3. Divizoarele de tensiune şi curent 57
4. Sursa reală de tensiune 59
5. Sursa reală de curent 61
6. Asocierile surselor ideale 62
7. Asocierea surselor reale 63

D. *Analiza circuitelor electrice cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff* 66

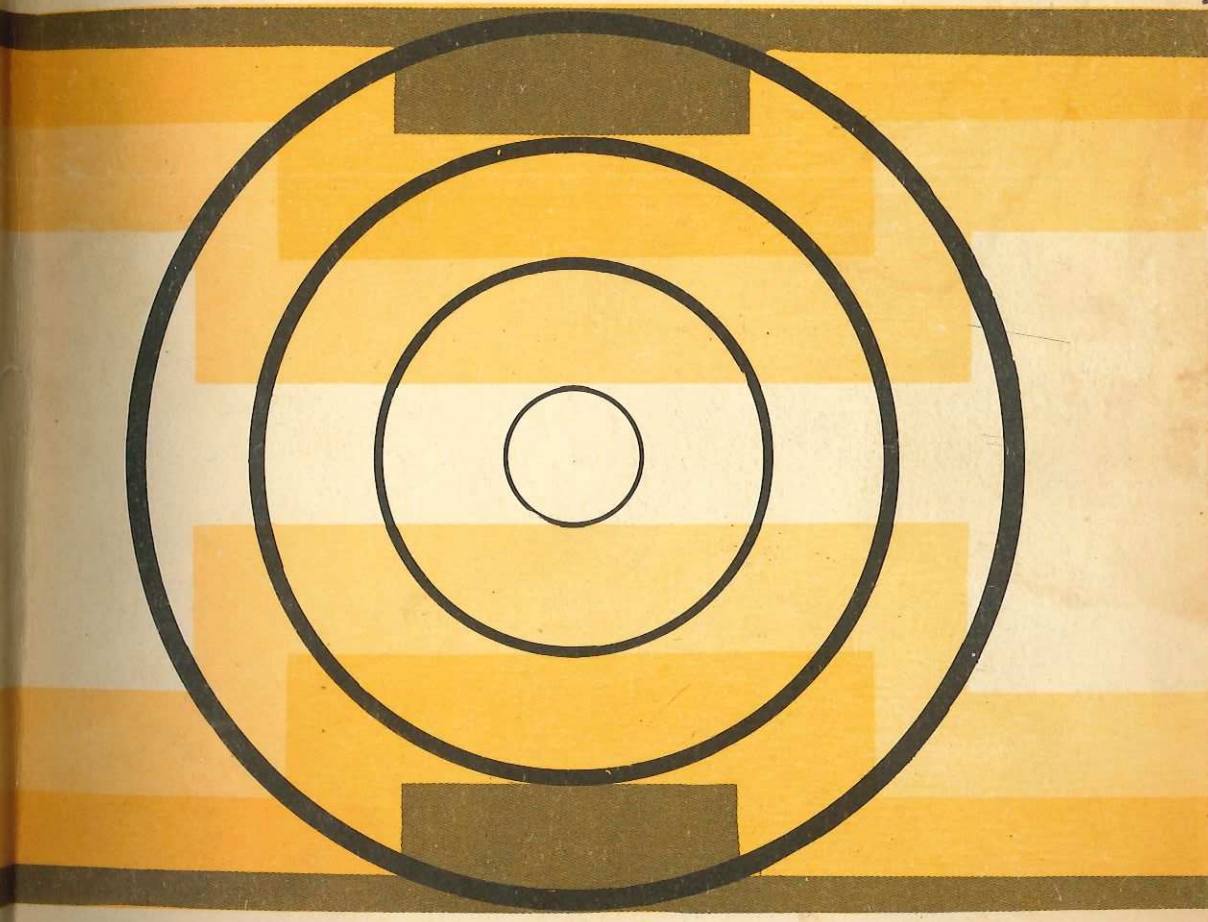
1. Diagrame orientate de curenţi şi tensiuni 66
2. Rezolvarea circuitelor cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff 72
3. Metode şi teoreme de rezolvare a circuitelor liniare de curent continuu . 76

XI
XII

ANDREI ȚUGULEA
MIHAI VASILIU
GHEORGHE FRĂȚILOIU
EMANOIL COCOȘ

ELECTROTEHNICA

Manual pentru licee industriale cu profil de electrotehnică, clasele a XI-a și a XII-a, și pentru școli profesionale



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI – 1983

Prof. dr. doc. ing. ANDREI ȚUGULEA
Șef lucrări ing. GHEORGHE FRĂȚILOIU
Șef lucrări dr. ing. MIHAI VASILIU
Ing. prof. EMANOIL COCOȘ

Electrotehnica

Manual pentru licee industriale cu profil de electrotehnică, clasele a XI-a și a XII-a, și pentru școli profesionale

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI — 1983

Capitolul 1

ELECTROTEHNICA CÎMPULUI MAGNETIC

A. CARACTERIZAREA CÎMPULUI MAGNETIC, MĂRIMILE ŞI LEGILE ACESTUIA

1. Cîmpul magnetic în vid. Forţa lui Lorentz

Dacă un corp de probă încărcat cu sarcina electrică q se mişcă în vid în preajma unor oxizi naturali ai fierului (magneţi naturali) sau a unor conductoare parcurse de curenţi, experienţa arată că asupra acestuia se exercită şi o forţă distinctă de cele gravitaţionale, mecanice sau electrice. Se spune că în jurul corpurilor sus-menţionate, în vid, se produce un *cîmp magnetic* care exercită o forţă magnetică asupra corpului de probă în mişcare.

• **Exprimarea matematică a forţei magnetice.** Fizicianul olandez *Hendrik Antoon Lorentz* (1853—1928) a arătat că forţa magnetică se poate exprima totdeauna prin relaţia vectorială:

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{1.1}$$

în care:

q este sarcina corpului de probă;

$\vec{v}$ — viteza corpului de probă;

$\vec{B}$ — inducţia magnetică a cîmpului magnetic.

• **Interpretarea fizică a expresiei forţei magnetice.** Deoarece forţa magnetică, cunoscută şi sub numele de *„forţa lui Lorentz"*, se exprimă în funcţie de produsul vectorial dintre vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{B}$, putem face următoarele afirmaţii verificabile experimental:

— forţa $\vec{F}_m$ este totdeauna perpendiculară pe planul determinat de vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{B}$ şi pentru sarcini pozitive ($q > 0$) se asociază acestora ca sens după regula burghiului drept (fig. 1.1), adică rotind pe $\vec{v}$ peste $\vec{B}$ după unghiul mai mic realizăm înaintarea burghiului în sensul forţei $\vec{F}_m$; pentru $q < 0$, sensul forţei $\vec{F}_m$ este opus (fig. 1.2);

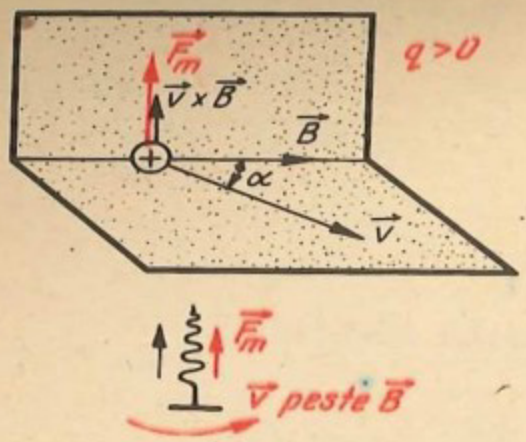


Fig. 1.1

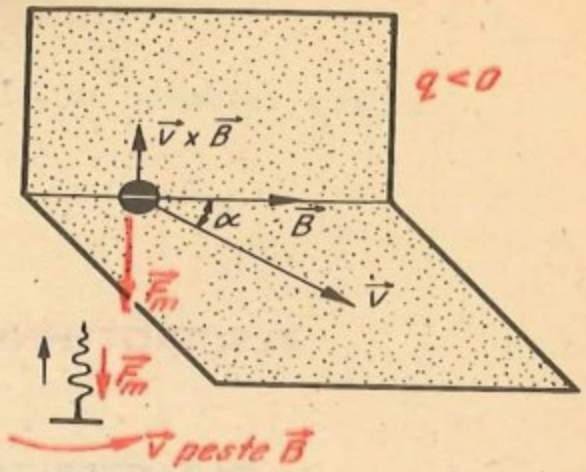


Fig. 1.2

— modulul forţei are expresia

$$F_m = |q| vB \sin \alpha, \tag{1.2}$$

α fiind unghiul dintre $\vec{v}$ şi $\vec{B}$ (fig. 1.1).

În particular, forţa este maximă cînd $\alpha = \frac{\pi}{2}$ şi are expresia:

$$F_{m\,max} = |q| vB. \tag{1.3}$$

Forţa este nulă cînd vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{B}$ sînt paraleli ($\alpha = 0$).

• Vectorul $\vec{B}$, adică **inducţia magnetică,** *este mărimea care caracterizează cîmpul magnetic în vid,* deoarece permite exprimarea forţei magnetice. Din relaţia (1.3) rezultă unitatea sa, numită *tesla* (simbol T):

$$\langle B \rangle = \frac{\langle F_m \rangle}{\langle q \rangle \langle v \rangle};$$

$$1 \text{ tesla} = \frac{1 \text{ newton} \times 1 \text{ secundă}}{1 \text{ coulomb} \times 1 \text{ metru}}$$

sau, folosind simbolurile corespunzătoare, $1\ \mathrm{T} = 1 \frac{\mathrm{N \cdot s}}{\mathrm{C \cdot m}} = 1 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A \cdot m}}$.

2. Momentul magnetic

Un **cîmp magnetic** se numeşte **uniform** sau **omogen într-o anumită regiune din spaţiu** dacă *inducţia sa magnetică este aceeaşi în fiecare punct din regiunea considerată, adică vectorul $\vec{B}$ are în toate punctele aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi mărime* (fig. 1.3). Dacă într-un cîmp magnetic uniform se introduce un ac de busolă sau un mic magnet natural, experienţa arată că asupra acestuia se exercită un cuplu de forţe al cărui moment tinde să

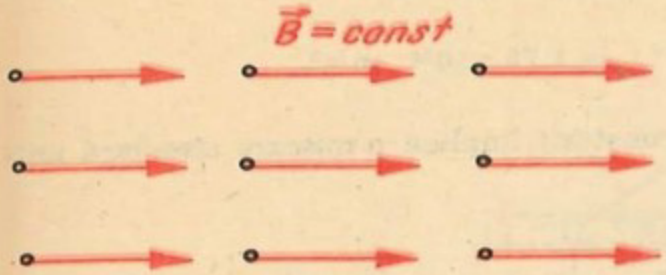


Fig. 1.3

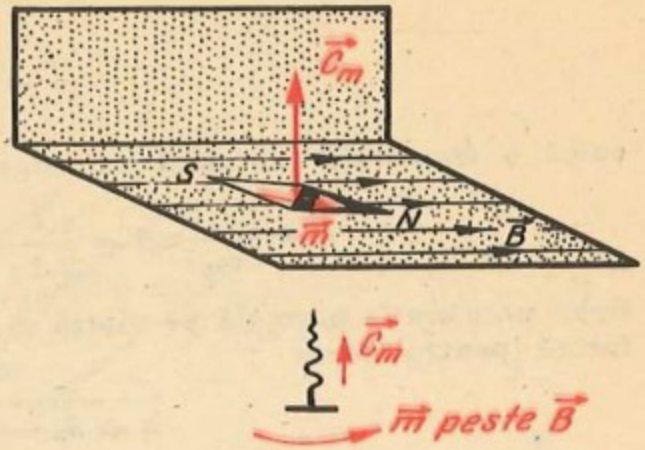


Fig. 1.4

orienteze o anumită axă a acului magnetic (axa polilor *S-N*) pe direcţia cîmpului (fig. 1.4).

Expresia vectorială a acestui cuplu este:

$$\vec{C}_m = \vec{m} \times \vec{B}. \tag{1.4}$$

Mărimea $\vec{m}$ caracterizează starea de magnetizare a acului magnetic şi se numeşte *moment magnetic*. El este orientat după axa polilor, dinspre *S* spre *N*. De aceea, acul se aşază stabil cu axa polilor pe direcţia cîmpului. Datorită acestei proprietăţi, cîmpul magnetic din vid poate fi sondat cu ajutorul unui ac de busolă: sensul şi direcţia acului ne indică sensul şi direcţia cîmpului, iar mărimea sa rezultă din expresia cuplului:

$$B = \frac{C_{m\ max}}{m}.$$

Dacă pe o suprafaţă aflată într-un domeniu în care există cîmp magnetic se presară pilitură de fier, fiecare particulă se comportă ca un mic ac magnetic şi se orientează în lungul liniei de cîmp magnetic. În acest fel liniile de cîmp magnetic pot fi vizualizate (fig. 1.5).

Aplicaţia 1. *Să se calculeze forţa lui Lorentz care se exercită asupra unui electron ce pătrunde într-un cîmp magnetic uniform de inducţie* $B = 1$ *T, cu viteza* $v = 10^5$ *m/s perpendiculară pe* $\vec{B}$.

$$F_m = |q_e| vB = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^5 \cdot 1 = 1{,}6 \cdot 10^{-14}\text{N}.$$

Aplicaţia 2. *Să se determine traiectoria electronului din aplicaţia 1, ştiind că masa sa este* $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ *kg.*

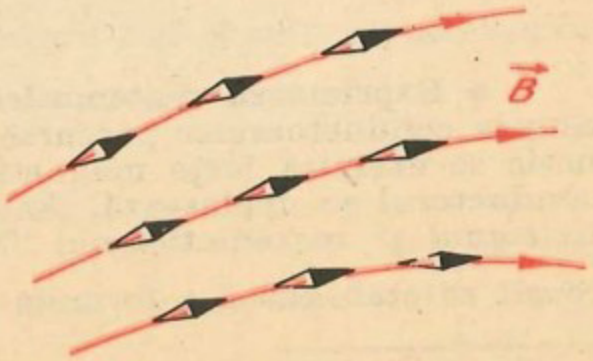


Fig. 1.5

Deoarece forţa este perpendiculară pe viteză, din legea fundamentală a dinamicii rezultă:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_m}{m_0} = \frac{q_e}{m_0} \vec{v} \times \vec{B},$$

adică o acceleraţie normală pe viteză, avînd modulul constant:

$$a = \frac{|q_e|}{m_0} vB = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} \cdot 10^5 \cdot 1 = 1{,}76 \cdot 10^{16} \text{ m/s}^2.$$

Orice acceleraţie normală pe viteză şi de modul constant implică o mişcare circulară uniformă pentru care:

$$a = a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{|q_e| vB}{m_0} = r\omega^2,$$

unde r este raza traiectoriei; obţinem:

$$r = \frac{m_0 v}{|q_e| B} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^5}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1} = 5{,}68 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

şi viteza unghiulară:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{10^5}{5{,}68 \cdot 10^{-7}} = 1{,}76 \cdot 10^{11} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Aplicaţia 3. *Care sînt viteza şi energia cinetică ale unui electron care efectuează într-un cîmp de inducţie $B = 0{,}5$ T o mişcare de rotaţie avînd $r = 10^{-5}$ m?*

Din aplicaţia *2* rezultă:

$$v = \frac{|q_e| rB}{m_0} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}5}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} = 8{,}8 \cdot 10^5 \text{ m/s};$$

$$W_c = \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} (8{,}8 \cdot 10^5)^2}{2} = 3{,}52 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Aplicaţia 4. *Care este momentul magnetic al unui ac de busolă, ştiind că în cîmpul magnetic terestru ($B_t = 5 \cdot 10^{-5}$ T) asupra sa se exercită un cuplu maxim $C_{m\,max} = 10^{-5}$ Nm?*

$$m = \frac{C_{m\,max}}{B_t} = \frac{10^{-5}}{5 \cdot 10^{-5}} = 0{,}2 \frac{\text{Nm}}{\text{T}} = 0{,}2 \text{ Am}^2.$$

3. Forţa lui Laplace

• **Exprimarea matematică a forţei lui Laplace.** Experienţa arată că asupra conductoarelor parcurse de curent electric şi introduse în cîmp magnetic se exercită forţe magnetice. Ca urmare a acţiunii forţelor magnetice, conductorul se deplasează. Analizînd experienţele lui *Oersted** şi *Ampère***, fizicianul şi matematicianul francez *Pierre Simon Laplace* (1749—1827) a reuşit să stabilească o formulă generală pentru calculul *forţei magnetice* $\vec{F}_L$

---

* *Hans Christian Oersted* (1777—1851) — fizician danez.
** *André-Marie Ampère* (1775—1836) — fizician şi matematician francez.

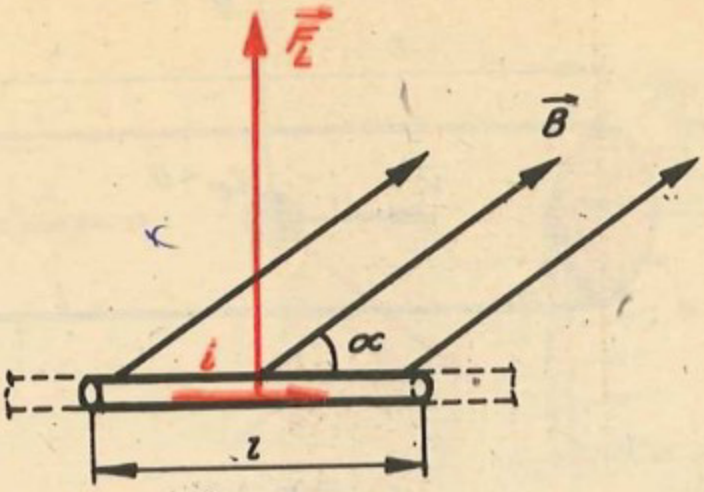


Fig. 1.6

ce se exercită asupra unui segment rectiliniu de conductor parcurs de curent. Această expresie, numită și **forța lui Laplace**, este:

$$\vec{F}_L = i\vec{l} \times \vec{B} \tag{1.5}$$

unde:

i este intensitatea curentului electric care străbate conductorul;

$\vec{l}$ — lungimea segmentului de conductor orientat în sensul curentului (fig. 1.6);

$\vec{B}$ — inducția magnetică a unui cîmp uniform.

• **Interpretarea fizică a expresiei forței lui Laplace.** Din expresia forței lui Laplace rezultă următoarele consecințe fizice verificabile experimental:

— forța lui Laplace este totdeauna perpendiculară pe planul determinat de vectorii $\vec{l}$ și $\vec{B}$;

— forța lui Laplace este maximă cînd vectorii $\vec{l}$ și $\vec{B}$ sînt perpendiculari și nulă cînd vectorii sînt paraleli:

$$F_{L\,max} = iBl;$$

— dacă vectorii fac un unghi α, atunci:

$$F_L(\alpha) = iBl \sin \alpha;$$

— sensul forței lui Laplace se asociază cu sensurile vectorilor $\vec{l}$ și $\vec{B}$ după *regula burghiului drept* (v. forța lui Lorentz).

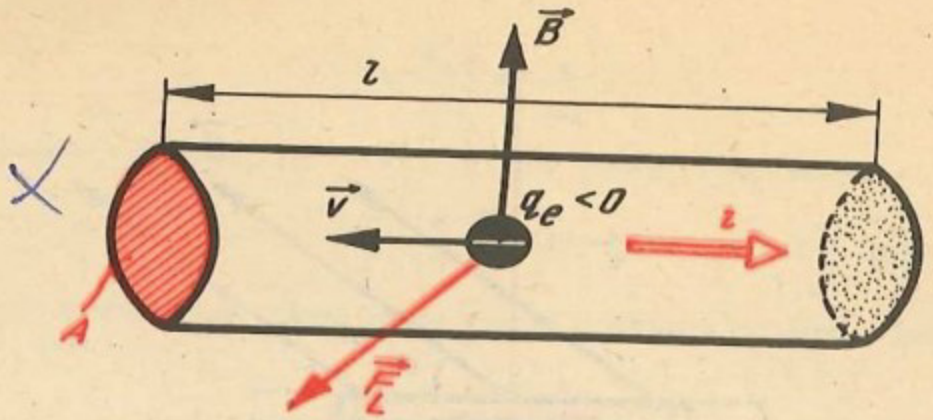


Fig. 1.7

• **Legătura dintre forţa lui Laplace şi forţa lui Lorentz.** *Forţa lui Laplace nu este decît o manifestare macroscopică a forţei lui Lorentz.* În adevăr, dacă presupunem că purtătorii de sarcină care constituie curentul electric sînt electroni (fig. 1.7), atunci ţinînd seama de semnificaţia microscopică a intensităţii curentului electric (v. Electrotehnica cl. X., cap. 2), obţinem:

$$i = JA = n|q_e|vA, \tag{1.6}$$

unde n este concentraţia de electroni, $q_e < 0$ — sarcina electronului, v — viteza de mişcare ordonată a electronilor, iar A — aria secţiunii transversale a conductorului. Substituind (1.6) în relaţia (1.5), obţinem:

$$\vec{F}_L = n|q_e|vA\vec{l} \times \vec{B} = nAlq_e\vec{v} \times \vec{B} = N_e q_e \vec{v} \times \vec{B},$$

unde $N_e = nAl$ este numărul total de electroni liberi din volumul Al al segmentului de conductor. S-a ţinut seamă că vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{l}$ au sensuri opuse deoarece electronii sînt negativi şi deci $|q_e|\vec{l}v = q_e\vec{v}l$.

Se observă că *forţa lui Laplace este rezultanta forţelor lui Lorentz ce se exercită asupra celor N_e electroni care participă la curent în cuprinsul segmentului de conductor.* Deoarece electronii nu pot părăsi conductorul, această forţă se transmite reţelei cristaline rigide a conductorului şi apare ca o forţă rezultantă macroscopică, adică forţa lui Laplace.

• **Măsurarea intensităţii curentului electric cu galvanometrul magnetoelectric.** Galvanometrul magnetoelectric (inventat de *Ampère*) este constituit dintr-un cadru dreptunghiular de arie $2a \times l$ pe care sînt înfăşurate N spire (fig. 1.8, *b*) şi care se poate roti între polii unui magnet permanent, unde se creează un cîmp magnetic radial (fig. 1.8, *a*).

Dacă spirele bobinei sînt parcurse de curentul i, atunci asupra unei laturi de bobină de lungime l se va exercita forţa lui Laplace:

$$F_L = NiBl,$$

iar asupra celeilalte laturi — o forţă opusă (fig. 1.8, *a*). Aceste forţe vor produce un *cuplu activ* de moment

$$C_a = 2aF_L = 2aNiBl.$$

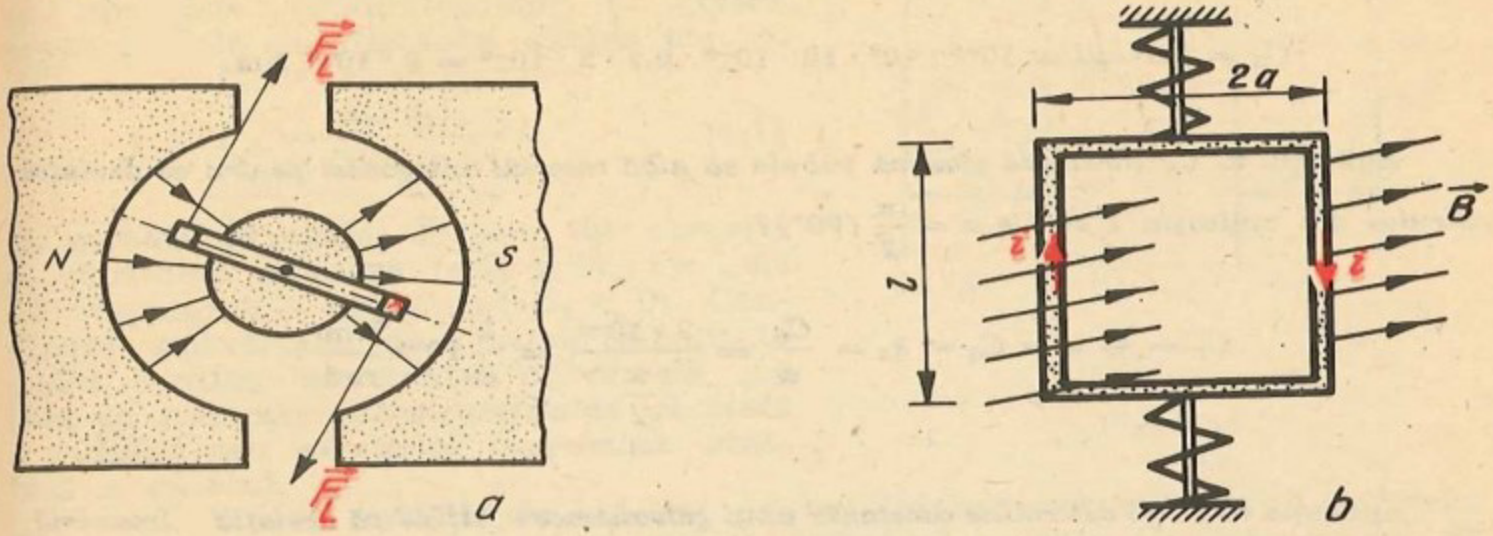


Fig. 1.8

Sub acţiunea acestui cuplu activ bobina se va roti, răsucind firele elastice de suspensie, care vor crea un *cuplu antagonist (sau rezistenţa)* a cărui expresie, conform legii lui *Hooke*, va fi

$$C_r = k_e \alpha,$$

unde k_e este constanta de elasticitate a firelor, iar α este unghiul de răsucire a bobinei şi deci a firelor.

La echilibru, cele două cupluri sînt egale

$$k_e \alpha = 2aNiBl,$$

de unde rezultă:

$$i = \frac{k}{2aNBl} \alpha = k_g \alpha.$$

k_g se numeşte *constanta galvanometrului*. Măsurînd unghiul α, se determină i. Cu ajutorul galvanometrului magnetoelectric se pot măsura intensităţi de curent de ordinul 10^{-12} A şi chiar mai mici.

Galvanometrele se leagă în serie cu circuitul în care se măsoară intensitatea curentului (fig. 1.9). Pentru extensia domeniului de măsurare se utilizează *şunturi* (fig. 1.10).

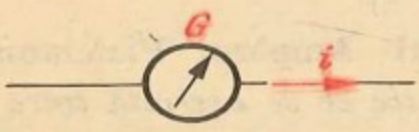


Fig. 1.9

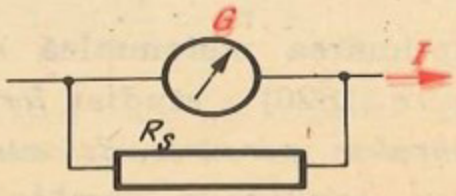


Fig. 1.10

Aplicaţia 1. *Cadrul mobil al unui galvanometru, format din $N = 100$ spire, de lungime $l = 2$ cm şi lăţime $2a = 1$ cm, este parcurs de un curent $i = 10\ \mu A$. Să se determine cuplul activ ce se exercită asupra lui, ştiind că inducţia magnetică între poli este $B = 0{,}1$ T.*

$$C_a = 2aNiBl = 10^{-2} \cdot 10^{2} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}1 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-8}\ \text{Nm}.$$

Aplicaţia 2. *Ce constantă elastică trebuie să aibă resortul antagonist pentru ca deviaţia cadrului din aplicaţia 1 să fie $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (90°)?*

$$C_r = k_e\ \alpha = C_a \Rightarrow k_e = \frac{C_a}{\alpha} = \frac{2 \cdot 10^{-8}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi} 10^{-8}\ \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}.$$

Aplicaţia 3. *Să se determine constanta unui galvanometru, ştiind că deviaţia sa maximă, $\alpha_{max} = 100$ diviziuni, se obţine la $i_{max} = 1\ \mu A$.*

$$k_g = \frac{i_{max}}{\alpha_{max}} = \frac{10^{-6}}{100} = 10^{-8}\ \text{A/div}.$$

⊙ **Observaţie.** Adesea deviaţiile bobinei se măsoară pe o riglă gradată în diviziuni şi deci k_g se exprimă în A/div.

Aplicaţia 4. *Ştiind că rezistenţa bobinei galvanometrului din aplicaţia 3 este $r_g = 100\ \Omega$, să se determine rezistenţa şuntului pentru ca să se poată măsura $I_{max} = 1$ A.*

Din egalitatea căderilor de tensiune obţinem

$$r_s = r_g / \left(\frac{I_{max}}{i_{g\ max}} - 1 \right) = 100/(1/10^{-6} - 1) \cong \frac{100}{10^{6}} \cong 10^{-4}\ \Omega.$$

4. Forţa lui Ampère

• **Exprimarea matematică a forţei lui Ampère.** Fizicianul francez *A.M. Ampère* (1820) a studiat *forţele magnetice ce se exercită între două conductoare paralele parcurse de curenţi* (fig. 1.11). Observaţiile sale experimentale l-au condus la următoarele concluzii:

— conductoarele parcurse de curenţi de acelaşi sens se atrag (fig. 1.11, *a*); conductoarele parcurse de curenţi de sens contrar se resping (fig. 1.11, *b*);

— forţele care se exercită în vid asupra conductoarelor sînt universal proporţionale cu produsul intensităţilor şi cu lungimea conductoarelor şi invers proporţionale cu distanţa dintre ele:

$$F_A = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i_1 i_2}{r} \cdot l. \qquad (1.7)$$

În această expresie, forţele de atracţie se consideră pozitive ($i_1 i_2 > 0$), iar cele de respingere — negative ($i_1 i_2 < 0$). Constanta universală de proporţionalitate $\mu_0/2\pi$ conţine constanta universală μ_0, care se numeşte *permeabilitatea absolută a vidului* sau *constanta magnetică absolută a vidului.*

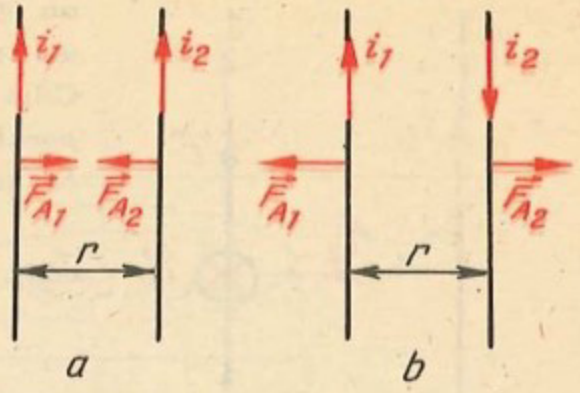


Fig. 1.11

• **Definirea unităţii de măsură pentru intensitatea curentului electric.** Valoarea lui μ_0 s-a ales convenabil la definirea unităţii de intensitate de curent, numite *amper* (A):

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ unităţi SI.}$$

Dacă $i_1 = i_2 = 1$ A, $l = 1$ m, iar distanţa între conductoare $r = 2$ m, se obţine

$$F_A = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} : \frac{1^2 \cdot 1}{2} = 10^{-7} \text{ N.}$$

Rezultă deci următoarea definiţie a amperului: **amperul** *este intensitatea curentului din fiecare conductor al unei perechi de conductoare paralele situate în vid la distanţa de 2 m, atunci cînd asupra fiecărui metru de lungime a fiecărui conductor se exercită forţa de 10^{-7} N.*

În afară de amper, în electrotehnică se mai folosesc
1 pA $= 10^{-12}$ A (picoamper);
1 μA $= 10^{-6}$ A (microamper);
1 mA $= 10^{-3}$ A (miliamper);
1 kA $= 10^{3}$ A (kiloamper);
1 MA $= 10^{6}$ A (megaamper).

Aplicaţia 1. *Să se calculeze forţa lui Ampère ce se exercită între două conductoare paralele de lungime $l = 1{,}5$ m, situate în vid la distanţa $r = 0{,}5$ m, parcurse de curenţi avînd intensităţile $i_1 = i_2 = 10\,000$ A.*

$$F_A = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 \frac{l}{r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} (10^4)^2 \frac{1{,}5}{0{,}5} = 60 \text{ N.}$$

Aplicaţia 2. *Două conductoare paralele de lungime $l = 2$ m, situate în vid la distanţa $r = 0{,}2$ m, sînt parcurse de curenţi egali în intensitate. Ce valoare are i dacă forţa amperiană de atracţie este $F_A = 50$ N?*

$$i = \sqrt{\frac{2\pi r F_A}{\mu_0 l}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 0{,}2 \cdot 50}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}} = 5\,000 \text{ A.}$$

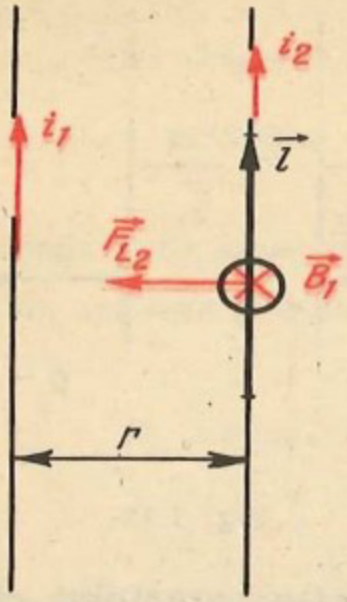


Fig. 1.12

Aplicaţia 3. *Pentru verificarea formulei lui Ampère, un laborator dispune de o singură sursă care poate furniza un curent a cărui intensitate maximă este* $I_{max} = 100$ *A. Cum trebuie distribuit acest curent între două conductoare paralele dispuse la* $l = 1$ *m şi avînd* $r = 0{,}1$ *m, pentru ca să se obţină forţe amperiene maxime?*

Deoarece $i_1 + i_2 = I_{max} = const$ şi forţa amperiană este proporţională cu produsul lor

$$F_A \sim i_1 i_2,$$

iar produsul a două numere a căror sumă este constantă este maxim cînd numerele sînt egale, rezultă

$$i_1 = i_2 = \frac{I_{max}}{2} = 50 \text{ A};$$

$$F_A = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \frac{50^2}{0{,}1} \cdot 1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

5. Formula Biot-Savart

Din punctul de vedere al teoriei cîmpului, care nu admite acţiune la distanţă, forţa lui Ampère se interpretează astfel: *fiecare dintre cele două conductoare produce în jurul său un cîmp magnetic care exercită o forţă asupra conductorului vecin.* Aşadar, forţa lui Ampère exercitată asupra conductorului *2* (fig. 1.12) este interpretată drept forţă a lui Laplace exercitată de cîmpul magnetic produs de conductorul *1:*

$$F_{A2} = F_{L2} \Rightarrow \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{r} l = B_1 i_2 l.$$

După simplificare rezultă:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \qquad (1.8)$$

care se numeşte *formula lui Biot-Savart**.

Deoarece forţa lui Laplace este perpendiculară pe planul determinat de conductor şi de cîmp, rezultă că vectorul $\vec{B}$ este tangent la cercul de rază r cu centrul pe axa conductorului *1*. Aşadar, liniile de cîmp magnetic ale unui conductor rectiliniu şi foarte lung sînt cercuri concentrice cu centrul

* *Jean-Baptiste Biot* (1774—1862) — fizician şi astronom francez;
Felix Savart (1791—1841) — fizician francez.

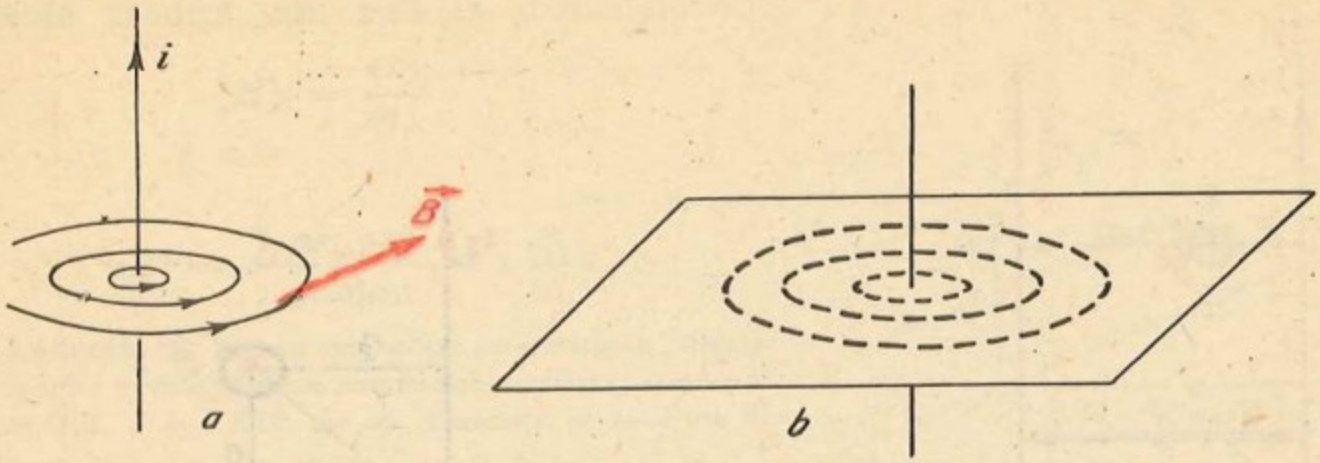


Fig. 1.13

pe conductor (fig. 1.13, *a*). Ele pot fi puse în evidenţă cu ajutorul piliturii de fier (fig. 1.13, *b*). Sensul vectorului $\vec{B}$ se asociază după regula burghiului drept cu sensul curentului.

Aplicaţia 1. *Să se calculeze inducţia magnetică produsă în vid de un fir rectiliniu foarte lung parcurs de curentul* $i = 100$ *A, la distanţa* $r = 1$ *m.*

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100}{2\pi \cdot 1} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ T}.$$

Aplicaţia 2. *Două conductoare paralele foarte lungi sînt parcurse de curenţii* $i_1 = 100$ *A şi* $i_2 = 200$ *A de acelaşi sens; distanţa dintre ele este* $r = 0{,}3$ *m. Să se afle punctul în care inducţia magnetică se anulează (fig. 1.14).*

Se observă că între conductoare cîmpurile se scad (fig. 1.14):

$$B = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi x} - \frac{\mu_0 i_2}{2\pi (r - x)} = 0.$$

Obţinem ecuaţia:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{x}{r - x} \Rightarrow x = r \frac{i_1}{i_1 + i_2} = 0{,}3 \frac{100}{100 + 200} = 0{,}1 \text{ m}.$$

○ **Observaţie.** Dacă $i_1 = i_2 \Rightarrow x = \frac{r}{2} = 0{,}15$ m.

Aplicaţia 3. *Două conductoare perpendiculare, situate în acelaşi plan, sînt parcurse de curenţii* i_1 *şi* i_2. *Să se afle cîmpul pe bisectoarea unghiului lor (fig. 1.15).*

Pe bisectoare $r_1 = r_2 = r$, deci

$$B = B_1 \pm B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi r} (i_1 \pm i_2).$$

Semnul (—) corespunde cazului cînd curenţii au acelaşi sens faţă de origine, iar semnul (+) cînd au sens contrar.

Dacă $i_1 = 20\,000$ A şi $i_2 = 10\,000$ A, iar $r = 1$ m:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} (20\,000 \pm 10\,000) = \begin{cases} 6 \cdot 10^{-3} \text{ T} \\ 2 \cdot 10^{-3} \text{ T}. \end{cases}$$

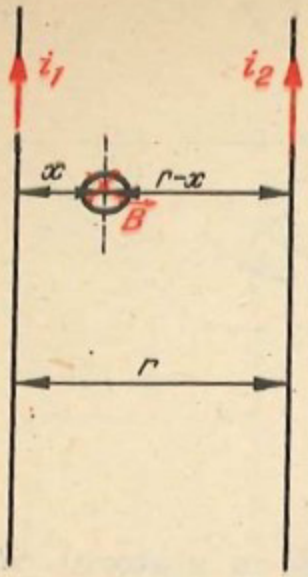


Fig. 1.14

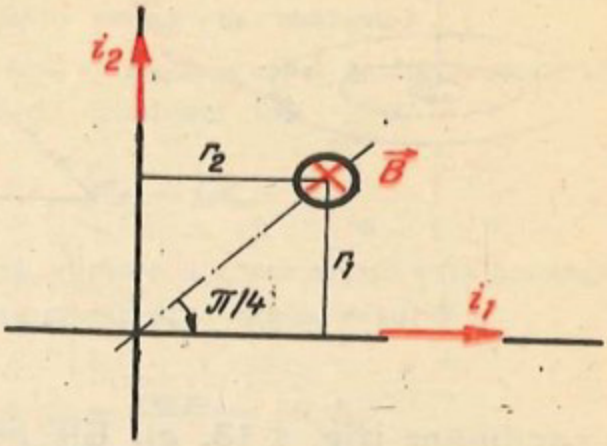


Fig. 1.15

6. Intensitatea cîmpului magnetic

• **În vid, intensitatea cîmpului magnetic este vectorul**

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \tag{1.9}$$

Deci în vid acest vector este universal proporţional cu inducţia magnetică.

• **În corpurile magnetizabile** nu se mai păstrează această proporţionalitate universală iar $\vec{H}$ se defineşte prin relaţia

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\vec{B}}{\mu} \tag{1.10}$$

în care:

μ_r este permeabilitatea magnetică relativă — mărime de material care depinde de natura corpurilor;

$\mu = \mu_0 \mu_r$ este permeabilitatea magnetică absolută a corpurilor.

Din formula Biot-Savart rezultă

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{i}{2\pi r} \tag{1.11}$$

• **Unitatea de intensitate a cîmpului magnetic** rezultă din relaţia dimensională

$$\langle H \rangle = \frac{\langle i \rangle}{\langle l \rangle},$$

deci

$$1 \text{ uSI} = \frac{1 \text{ amper}}{1 \text{ metru}} = 1 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

Aplicaţia 1. *Să se calculeze intensitatea cîmpului magnetic produs de un conductor rectiliniu parcurs de curentul* $i = 6\,280$ *A la distanţa* $r = 1$ *m de axa sa.*

$$H = \frac{i}{2\pi r} = \frac{6\,280}{2\pi \cdot 1} = 1\,000 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

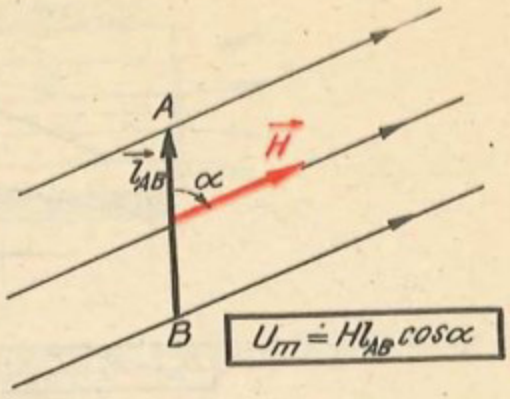


Fig. 1.16

Aplicaţia 2. *Să se calculeze inducţia produsă de conductorul de mai sus într-un mediu feromagnetic de permeabilitate relativă* $\mu_r = 100$.

$$B = \mu_0 \mu_r H = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^2 \cdot 10^3 = 1{,}257 \cdot 10^{-1} \text{ T}.$$

7. Tensiunea magnetică. Teorema lui Ampère

• **Considerăm un cîmp magnetic uniform** de inducţie $\vec{B}$ şi intensitate $\vec{H}$ (fig. 1.16) **şi un drum rectiliniu.**

Se numeşte *tensiune magnetică asociată unui drum rectiliniu* l_{AB} mărimea

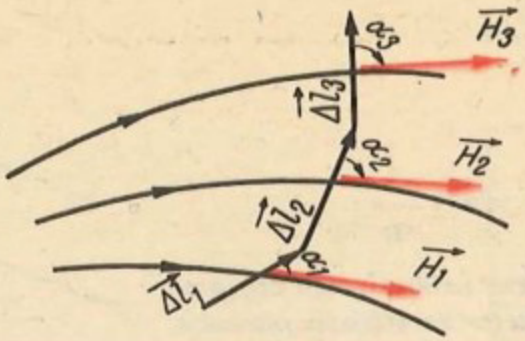
$$U_m = Hl_{AB} \cos \alpha \tag{1.12}$$

Tensiunea magnetică este o mărime algebrică, al cărei sens de calcul este cel al vectorului $\vec{l}_{AB}$ (fig. 1.16). Astfel:

$$U_m = Hl_{AB} \cos \alpha = \begin{cases} Hl_{AB} & \text{dacă } \alpha = 0; \\ 0 & \text{dacă } \alpha = \dfrac{\pi}{2}; \\ -Hl_{AB} & \text{dacă } \alpha = \pi. \end{cases}$$

• **Pentru drumuri nerectilinii şi cîmpuri neuniforme,** noţiunea de tensiune magnetică se generalizează împărţind drumul în segmente rectilinii suficient de mici pentru ca în cuprinsul lor cîmpul să fie uniform. Astfel, pentru fiecare segment de drum se poate aplica definiţia (1.12) iar rezultatele pentru întregul drum se însumează algebric (fig. 1.17):

$$U_m = \sum_k H_k \Delta l_k \cos \alpha_k \tag{1.13}$$



$$U_m = H_1 \Delta l_1 \cos\alpha_1 + H_2 \Delta l_2 \cos\alpha_2 + H_3 \Delta l_3 \cos\alpha_3$$

Fig. 1.17

Dacă drumul este închis tensiunea magnetică se numeşte *tensiune magnetomotoare* (U_{mm}).

• **Teorema lui Ampère** afirmă: *tensiunea magnetomotoare pe orice drum închis este egală cu suma algebrică a intensităţilor curenţilor din firele înconjurate de drumul închis:*

$$U_{mm} = \sum_k i_k \tag{1.14}$$

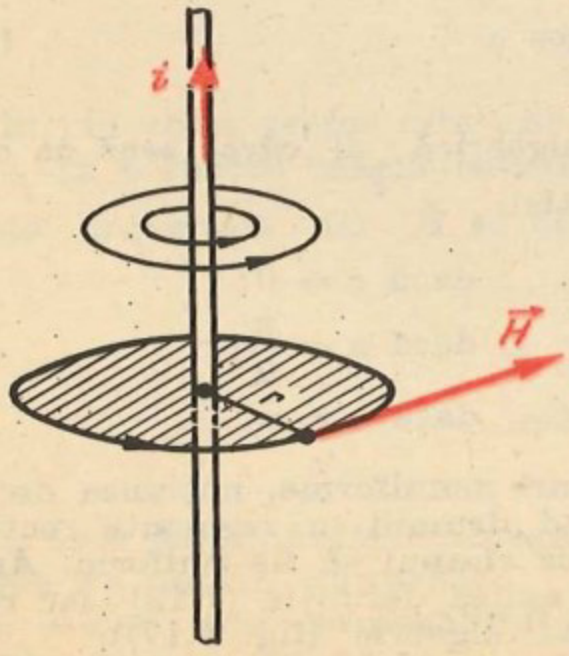


Fig. 1.18

Suma algebrică a curenţilor înconjuraţi de o curbă închisă se numeşte *solenaţie.*

Ilustrăm teorema lui Ampère pentru un fir rectiliniu foarte lung parcurs de curentul i (fig. 1.18). Alegem drept drum închis o linie de cîmp circulară de rază r.

Deoarece pe această linie de cîmp $\vec{H}$ are mărimea constantă şi este mereu tangent la cerc, obţinem

$$U_{mm} = \sum_{cerc} H_k \, \Delta l_k = H \cdot l_{cerc} =$$

$$= \frac{i}{2\pi r} \cdot 2\pi r = i.$$

Teorema este valabilă pentru orice drum închis oricare ar fi natura corpurilor prin care trece drumul.

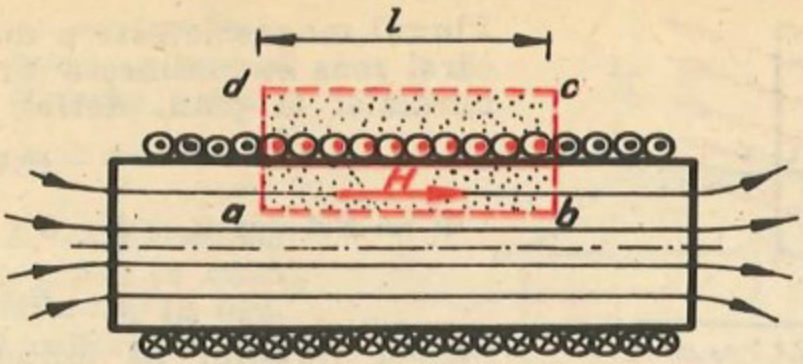


Fig. 1.19

Aplicaţie. *Să se calculeze inducţia magnetică într-un solenoid foarte lung avînd N spire, de lungime l, parcurse de curentul i (fig. 1.19).*

Experienţa arată că în solenoid cîmpul este uniform, vectorii $\vec{H}$ şi $\vec{B}$ fiind orientaţi în lungul axei solenoidului; în exteriorul solenoidului cîmpul este nul. Aplicăm teorema lui Ampère pe un drum închis dreptunghiular *a*, *b*, *c*, *d*, *a* care cuprinde cele *N* spire situate pe lungimea *l*.

$$U_{mm} = H \cdot l_{ab} \cos 0 + H \cdot l_{bc} \cos \frac{\pi}{2} + 0 \cdot l_{cd} + H l_{da} \cos \frac{\pi}{2} = H \cdot l = Ni (l_{ab} \equiv l).$$

Rezultă

$$H = \frac{Ni}{l} \tag{1.15}$$

Pentru $N = 1\,000$ spire, $l = 0{,}5$ m şi $i = 2$ A obţinem:

$$H = \frac{1\,000 \cdot 2}{0{,}5} = 4\,000 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

Inducţia magnetică va fi

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{Ni}{l} \tag{1.16}$$

Dacă $\mu_r = 50$,

$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 4\,000 = 2{,}51 \cdot 10^{-1} \text{ T}.$$

8. Fluxul magnetic

• **Considerăm un cîmp magnetic uniform** avînd inducţia $\vec{B}$ şi o **suprafaţă plană** de arie A a cărei normală $\vec{n}$ face unghiul α cu liniile de cîmp (fig. 1.20). Se numeşte *flux magnetic* mărimea scalară

$$\Phi = BA \cos \alpha \tag{1.17}$$

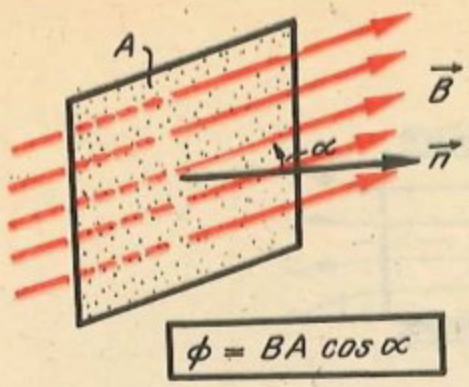


Fig. 1.20

Fluxul magnetic este o mărime algebrică al cărei sens se defineşte în raport cu sensul normalei la plan. Astfel

$$\Phi = BA \cos \alpha = \begin{cases} BA & \text{dacă } \alpha = 0; \\ 0 & \text{dacă } \alpha = \dfrac{\pi}{2}; \\ -BA & \text{dacă } \alpha = \pi. \end{cases}$$

Sensul fluxului se indică adesea printr-o săgeată orientată în sensul normalei.

Unitatea de flux magnetic se numeşte *weber* (Wb):

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot 1 \text{ m}^2.$$

• **Pentru cîmpuri neuniforme şi suprafeţe care nu sînt plane,** noţiunea se generalizează împărţind suprafaţa în suprafeţe elementare plane de arie ΔA_k în cuprinsul cărora cîmpul este practic uniform; calculînd fluxurile elementare cu relaţia de definiţie (1.17) şi însumînd algebric rezultatele, se obţine (fig. 1.21)

$$\Phi = \sum_{(k)} B_k \Delta A_k \cos \alpha_k \qquad (1.18)$$

• **Legea fluxului magnetic.** *Fluxul magnetic prin orice suprafaţă închisă este nul* (fig. 1.22). Semnificaţia fizică a acestui enunţ rezultă din faptul că liniile de cîmp ale inducţiei magnetice sînt curbe închise care înconjoară conductoarele parcurse de curenţi. Aceste linii nu izvorăsc şi nu se scurg nicăieri, spre deosebire de liniile de cîmp electric care izvorăsc din sarcinile pozitive şi se scurg în sarcinile negative. Cu alte cuvinte, *în natură nu există sarcini magnetice capabile să producă cîmp magnetic* aşa cum sarcinile electrice produc cîmp electric.

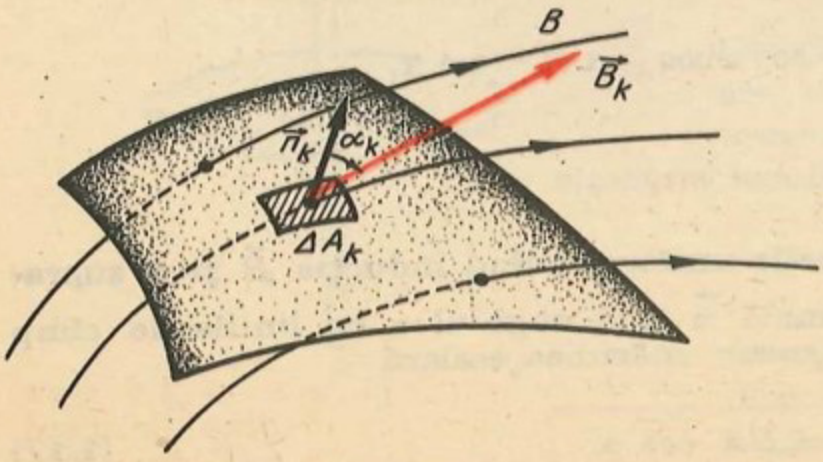


Fig 1.21

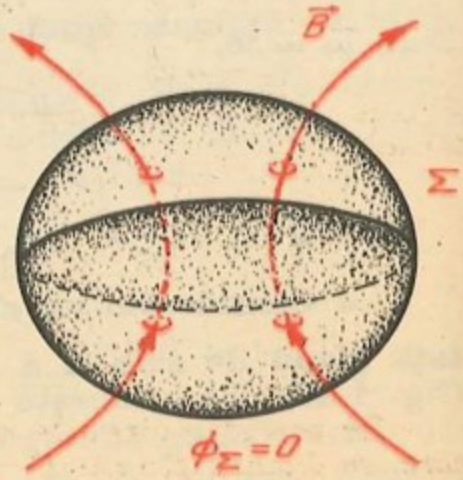


Fig. 1.22

Aplicația 1. *Să se verifice legea fluxului magnetic pentru suprafața unui cub de latură a așezat într-un cîmp magnetic uniform de inducție* $\vec{B}$ *(fig. 1.23).*

Fie B_x, B_y și B_z componentele scalare ale cîmpului în raport cu axele de coordonate *Oxyz* alese ca în figura 1.23. Cîmpul fiind uniform, aceste componente sînt constante. Calculăm fluxurile prin cele șase fețe ale cubului, considerîndu-le pozitive cînd ies și negative cînd intră:

$$\Phi_{cub} = B_x A_{abcd} - B_x A_{efgh} +$$
$$+ B_y A_{bcgf} - B_y A_{adeh} + B_z A_{dcgh} -$$
$$- B_z A_{abfe} = 0$$

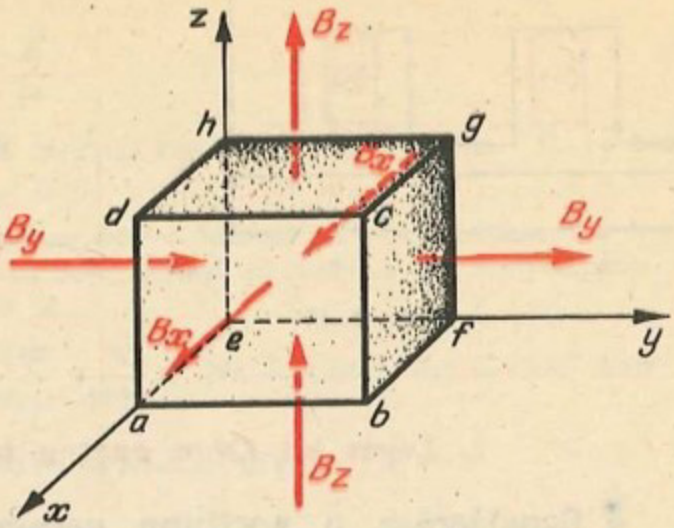


Fig. 1.23

deoarece

$$A_{abcd} = A_{efgh} = \ldots = A_{cdeh} = a^2.$$

Aplicația 2. *Să se calculeze inducția magnetică a unui cîmp magnetic uniform care, printr-o suprafață plană de arie* $A = 10\ m^2$ *orientată sub un unghi de* $\frac{\pi}{4}$ $(45°)$ *față de liniile de cîmp, produce un flux* $\Phi = 3\ Wb$.

$$\Phi = BA\cos\alpha \Rightarrow B = \frac{\Phi}{A\cos\alpha} = \frac{3}{10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0{,}846\ T.$$

Aplicația 3. *Se consideră suprafața totală a unui cilindru circular drept. Prin una dintre baze intră fluxul* $\Phi_1 = 0{,}03\ Wb$, *iar prin cealaltă iese* $\Phi_2 = 0{,}01\ Wb$. *Ce flux revine suprafeței laterale și care este semnul acestuia?*

Din legea fluxului magnetic rezultă:

$$-\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{lat} = 0 \Rightarrow \Phi_{lat} = \Phi_1 -$$
$$- \Phi_2 = 0{,}03 - 0{,}01 = 0{,}02\ Wb > 0.$$

Fluxul Φ_{lat} fiind pozitiv, iese din suprafața laterală (fig. 1.24).

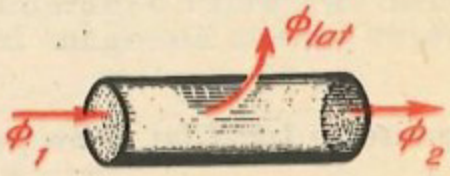


Fig. 1.24

B. CIRCUITE MAGNETICE. INDUCTIVITATE

1. Circuite magnetice

Se numesc **circuite magnetice** *ansamblurile de bobine cu miez de fier prin care se închid fluxurile magnetice.* În figura 1.25 este reprezentat circuitul magnetic al unui electromagnet. Transformatoarele și mașinile electrice oferă numeroase exemple de circuite magnetice.

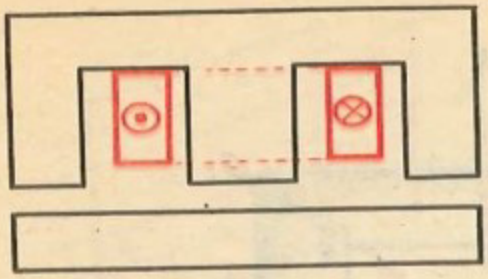


Fig. 1.25

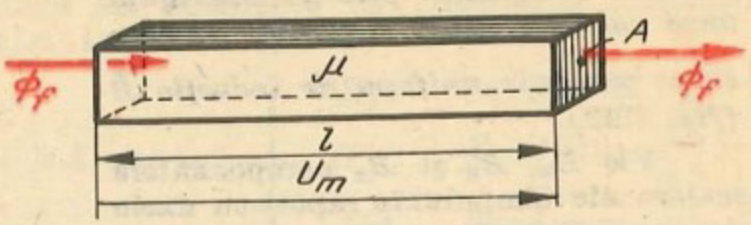


Fig. 1.26

2. Legea lui Ohm pentru o latură de circuit magnetic

• **Considerăm o porţiune neramificată de circuit magnetic,** numită *latură* (fig. 1.26). Fie l lungimea ei şi μ — permeabilitatea magnetică absolută a materialului ei. Fluxul magnetic care străbate o secţiune transversală a laturii se numeşte *flux fascicular* şi se notează cu Φ_f. Mai presupunem că inducţia magnetică este uniformă şi orientată numai în lungul laturii şi deci că nu există scăpări de flux prin suprafaţa laterală. Atunci fluxul fascicular prin orice secţiune transversală de arie A este acelaşi. Tensiunea magnetică din lungul laturii va fi

$$U_m = H \cdot l = \frac{B}{\mu} \cdot l = \frac{\Phi_f}{\mu A} \cdot l. \qquad (1.19)$$

Mărimea

$$R_m = \frac{l}{\mu A} \qquad (1.20)$$

se numeşte *reluctanţa* laturii. Cu ajutorul reluctanţei, relaţia (1.19) se exprimă astfel

$$U_m = R_m \Phi_f \qquad (1.21)$$

şi se numeşte *legea lui Ohm pentru latura de circuit magnetic* (aceasta — datorită asemănării ei formale cu legea lui Ohm pentru circuitele electrice: $U = RI$).

Unitatea SI de reluctanţă este $\frac{\text{A}}{\text{Wb}}$.

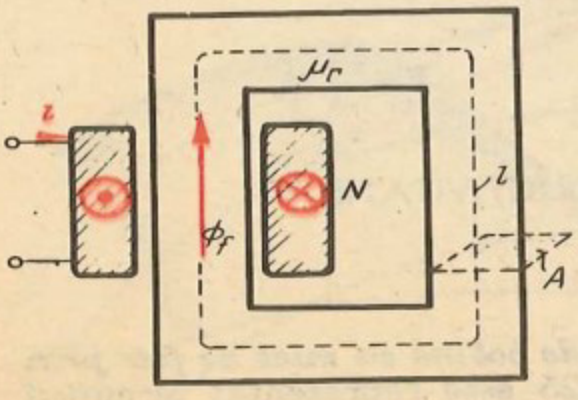


Fig. 1.27

• **Dacă latura formează un circuit închis înconjurat de o bobină** cu N spire parcurse de curentul i (fig. 1.27), aplicînd teorema lui Ampère obţinem:

$$U_{mm} = R_m \Phi_f = Ni,$$

de unde rezultă relaţia:

$$\Phi_f = \frac{Ni}{R_m}, \qquad (1.22)$$

analoagă cu

$$I = \frac{E}{R},$$

care reprezintă *legea lui Ohm pentru un circuit închis* avînd t.e.m. E şi rezistenţa totală R.

Aplicaţia 1. *Să se calculeze fluxul fascicular într-o bobină cu circuit magnetic închis, avînd lungimea $l = 1$ m, $A = 0{,}01$ m² şi $\mu_r = 500$, ştiind că bobina de magnetizare are $N = 1\,000$ spire parcurse de curentul $i = 0{,}5$ A.*

$$R_m = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 0{,}01} = \frac{10^7}{20\pi} \frac{\text{A}}{\text{Wb}}; \quad Ni = 1\,000 \cdot 0{,}5 = 500 \text{ Asp};$$

$$\Phi_f = \frac{500}{10^7/20\pi} = \pi \cdot 10^{-3} \text{ Wb} = \pi \text{ mWb}.$$

Inducţia magnetică va fi:

$$B = \frac{\Phi_f}{A} = \frac{\pi \cdot 10^{-3}}{10^{-2}} = 0{,}314 \text{ T}.$$

Aplicaţia 2. *Ce curent trebuie să alimenteze bobina din aplicaţia 1 pentru a se obţine o inducţie $B = 1$ T?*

$$\Phi_f = BA = 1 \cdot 10^{-2} = 10^{-2} \text{ Wb};$$

$$Ni = R_m \Phi_f = \frac{10^7}{20\pi} \cdot 10^{-2} = \frac{10^4}{2\pi} \text{ Asp};$$

$$i = \frac{Ni}{N} = \frac{10^4}{2\pi \cdot 10^3} = \frac{10}{2\pi} \text{ A}.$$

3. Teorema întîi a lui Kirchhoff pentru un nod de circuit magnetic

Se consideră un nod de circuit magnetic, adică un punct în care se ramifică mai multe laturi (fig. 1.28, *a*). Fie Φ_{f1}, Φ_{f2}, Φ_{f3} fluxurile magnetice fasciculare din laturile care formează nodul. Considerăm o suprafaţă închisă Σ care înconjoară nodul şi aplicăm legea fluxului magnetic acestei suprafeţe:

$$\Phi_\Sigma = \Phi_{f1} + \Phi_{f2} + \Phi_{f3} = 0 \tag{1.23}$$

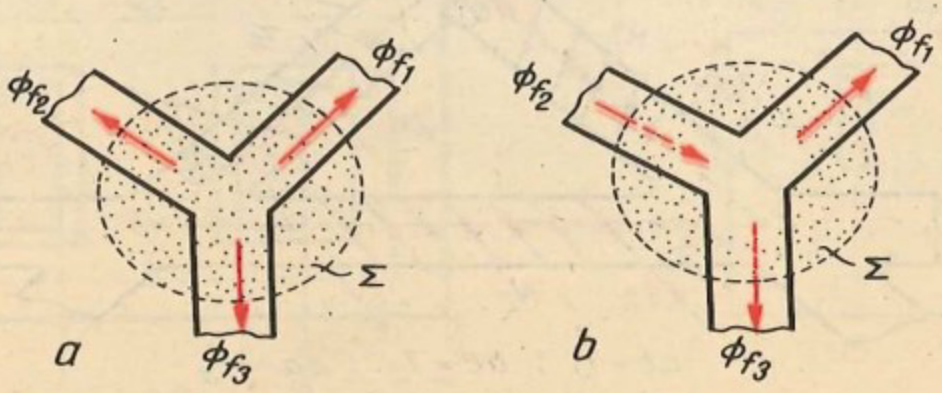


Fig. 1.28

Dacă fluxurile au sensul din figura 1.28, *b*, obţinem

$$\Phi_\Sigma = \Phi_{f1} - \Phi_{f2} + \Phi_{f3} = 0. \qquad (1.24)$$

Aceste relaţii exprimă **teorema întîi a lui Kirchhoff pentru un nod de circuit magnetic,** care, în forma ei generală, se enunţă astfel: *suma algebrică a fluxurilor magnetice fasiculare ale laturilor ce converg într-un nod de circuit magnetic este nulă.* De regulă, fluxurile care ies din nod se consideră pozitive, iar cele care intră se consideră negative.

Aplicaţia 1. *În nodul din figura 1.28, a* $\Phi_{f1} = 0{,}1$ *Wb,* $\Phi_{f2} = 0{,}3$ *Wb. Să se calculeze* Φ_{f3}.

$$\Phi_{f3} = -\Phi_{f1} - \Phi_{f2} = -0{,}1 - 0{,}3 = -0{,}4 \text{ Wb}.$$

⊙ **Observaţie.** Fluxul Φ_{f3} intră în nod.

Aplicaţia 2. *În nodul din figura 1.28, b* $\Phi_{f1} = \Phi_{f2} = 0{,}05$ *Wb. Să se calculeze* Φ_{f3}.

$$\Phi_{f3} = \Phi_{f2} - \Phi_{f1} = 0{,}05 - 0{,}05 = 0 \text{ Wb}.$$

○ **Observaţie.** Prin latura *3* nu trece flux.

4. Teorema a doua a lui Kirchhoff

Considerăm o succesiune de laturi de circuit magnetic care formează un drum închis (un ochi) (fig. 1.29). Aplicînd teorema lui Ampère acestui drum închis obţinem

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 = N_1 i_1 + N_2 i_2 + N_3 i_3$$

sau

$$U_{m1} + U_{m2} + U_{m3} = N_1 i_1 + N_2 i_2 + N_3 i_3. \qquad (1.25)$$

sau, ţinînd seama de legea lui Ohm pentru fiecare latură,

$$R_{m1}\Phi_{f1} + R_{m2}\Phi_{f2} + R_{m3}\Phi_{f3} = N_1 i_1 + N_2 i_2 + N_3 i_3. \qquad (1.26)$$

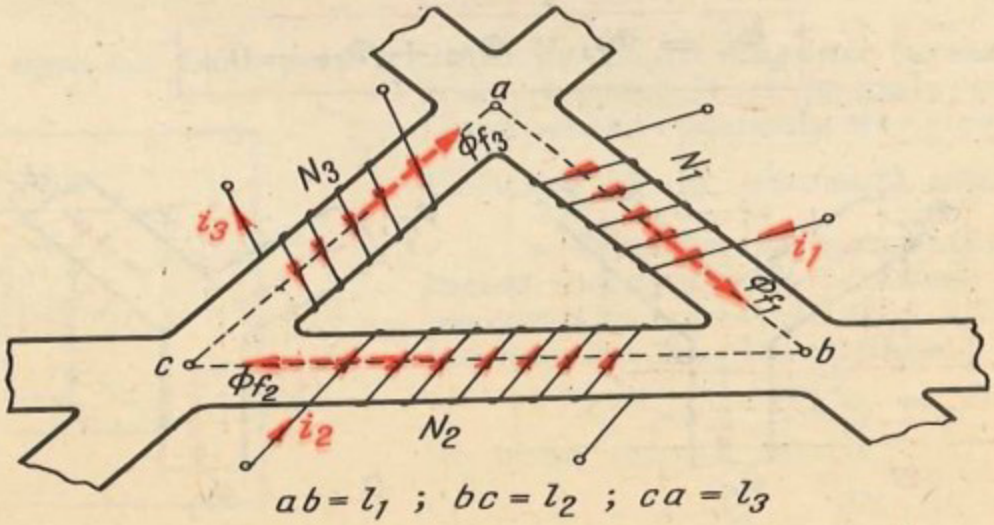


Fig. 1.29

Această relație exprimă **teorema a doua a lui Kirchhoff pentru un ochi de circuit magnetic**, care în forma ei generală se enunță astfel: *suma algebrică a căderilor de tensiune magnetică din lungul laturilor unui ochi este egală cu suma algebrică a solenațiilor bobinelor care înlănțuie laturile ochiului.* Căderile de tensiune și solenațiile care se întîlnesc în sens contrar sensului de parcurs se iau cu semnul minus (—).

Aplicația 1. *În ochiul din figura 1.29 se dau:* $U_{m1} = 500$ *Asp;* $U_{m2} = 800$ *Asp;* $U_{m3} = 200$ *Asp;* $N_1 i_1 = 2\,000$ *Asp;* $N_2 i_2 = 1\,000$ *Asp. Să se determine* $N_3 i_3$.

Din (1.25) rezultă:

$$N_3 i_3 = U_{m1} + U_{m2} + U_{m3} - N_1 i_1 - N_2 i_2 = 1\,500 - 3\,000 = -1\,500 \text{ Asp.}$$

⊙ **Observație.** Solenația fiind negativă, sensul curentului din bobina *3* trebuie inversat.

Aplicația 2. *Dacă* $N_2 i_2 = 1\,000$ *Asp, cît trebuie să fie* $N_1 i_1$ *pentru ca solenația* $N_3 i_3$ *să fie nulă?*

$$N_1 i_1 = U_{m1} + U_{m2} + U_{m3} - N_2 i_2 - N_3 i_3 = 1\,500 - 1\,000 - 0 = 500 \text{ Asp.}$$

Aplicația 3. *Știind că* $N_1 = 100$ *spire și* $N_2 = 500$ *spire, să se determine curenții din aplicația 2.*

$$i_1 = \frac{N_1 i_1}{N_1} = \frac{500}{100} = 5\text{A}; \quad i_2 = \frac{N_2 i_2}{N_2} = \frac{1\,000}{500} = 2\text{A}.$$

5. Analogia cu circuitele electrice

Rezolvarea circuitelor magnetice cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff se face la fel ca în cazul circuitelor electrice de c.c. (v. Electrotehnica cl. a X-a, cap. 3), pe baza următorului tabel de analogii (corespondențe):

— flux magnetic fascicular Φ_f ⟷ curent electric I;
— tensiune magnetică U_m ⟷ tensiune electrică U;
— solenație Ni ⟷ t.e.m. E;
— reluctanță R_m ⟷ rezistență R;
— permeabilitate μ ⟷ conductivitate σ.

Pe baza acestor analogii, fiecărui circuit magnetic i se asociază o schemă de circuit electric care se rezolvă cu metodele circuitelor de c.c.

Aplicația 1. *Se consideră circuitul magnetic din figura 1.30, a. Se cere să i se aplice teoremele lui Kirchhoff și să se rezolve.*

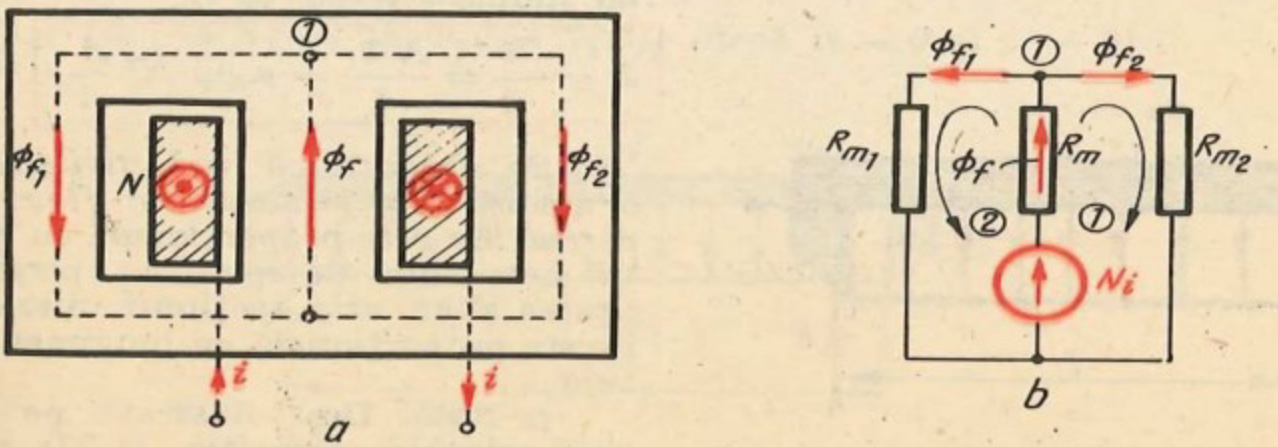


Fig. 1.30

Schema asociată de circuit electric este reprezentată în figura 1.30, *b*. Aplicînd teoremele lui Kirchhoff obţinem:

$$\begin{cases} \Phi_{f1} + \Phi_{f2} - \Phi_f = 0 \text{ (nod 1)}; \\ R_m\Phi_f + R_{m1}\Phi_{f1} = Ni \text{ (ochi 1)}; \\ R_m\Phi_f + R_{m2}\Phi_{f2} = Ni \text{ (ochi 2)}. \end{cases}$$

Dacă $R_{m1} = R_{m2}$, din rezolvarea sistemului se obţine:

$$\Phi_f = \frac{2Ni}{R_{m1} + 2R_m}; \quad \Phi_{f1} = \Phi_{f2} = \frac{\Phi_f}{2} = \frac{Ni}{R_{m1} + 2R_m}.$$

Aplicaţia 2. *Se dau* $Ni = 5\,000$ *Asp*, $R_{m1} = 2R_m = R_{m2} = 20\,000$ *Asp/Wb. Să se afle fluxurile fasciculare.*

Se obţine

$$\Phi_f = \frac{10\,000}{40\,000} = 0{,}25 \text{ Wb}; \quad \Phi_{f1} = \Phi_{f2} = \frac{0{,}25}{2} = 0{,}125 \text{ Wb}.$$

6. Inductivitate

• **Inductivitatea unei bobine.** Considerăm un solenoid de lungime l, cu N spire parcurse de curentul i, bobinat pe un miez de permeabilitate relativă μ_r (fig. 1.31). Se numeşte *fluxul total al solenoidului* şi se notează cu Φ fluxul ce străbate suprafeţele spirelor sale:

$$\Phi = N\Phi_f.$$

Se numeşte *inductivitate* (sau *inductanţă*) *a solenoidului* mărimea

$$L = \frac{\Phi}{i} \tag{1.27}$$

Fluxul fascicular al solenoidului rezultă din legea lui Ohm:

$$\Phi_f = \frac{Ni}{R_m} = \frac{Ni}{\frac{l}{\mu_0\mu_r A}} = \mu_0\mu_r\, Ni\,\frac{A}{l},$$

iar inductivitatea va fi

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{N\Phi_f}{i} = \mu_0\mu_r\, N^2\,\frac{A}{l}. \tag{1.28}$$

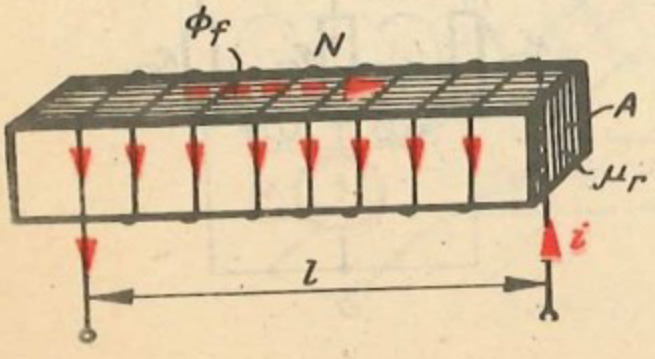


Fig. 1.31

Se observă că *inductivitatea este o mărime independentă de flux şi de curent.* Ea este proporţională cu pătratul numărului de spire, cu permeabilitatea şi cu aria secţiunii miezului şi invers proporţională cu lungimea acestuia.

○ **Notă.** Deşi ilustrată pe cazul unui solenoid, definiţia (1.27) inductivităţii este generală, fiind aplicabilă

pentru orice bobină. Formula de calcul este evident diferită de la caz la caz.

Unitatea de inductivitate se numeşte *henry* (H)

$$1 \text{ henry} = \frac{1 \text{ weber}}{1 \text{ amper}} = 1\,\frac{\text{Wb}}{\text{A}} = 1 \text{ H } (1 \text{ mH} = 10^{-3} \text{ H}).$$

Aplicaţia 1. *Să se calculeze inductivitatea unei bobine al cărei flux total este* $\Phi = 0{,}3$ *Wb, atunci cînd este parcursă de* $i = 10$ *A.*

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{0{,}3}{10} = 0{,}03 \text{ H} = 30 \text{ mH}.$$

Aplicaţia 2. *Să se calculeze inductivitatea unui solenoid avînd* $N = 1\,000$ *spire,* $l = 1$ *m,* $A = 10$ *cm*^{2}, $\mu_r = 500$.

$$L = \mu_0\mu_r \, N^2 \frac{A}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 1\,000^2 \, \frac{10 \cdot 10^{-4}}{1} = 0{,}628 \text{ H}.$$

Aplicaţia 3. *Inductivitatea unui solenoid cu miez de fier este* $L = 0{,}5$ *H. Dacă miezul se scoate, inductivitatea devine* $L_0 = 0{,}025$ *H. Să se calculeze* μ_r.

$$L = \mu_0\mu_r \, N^2 \frac{A}{l}; \quad L_0 = \mu_0 \cdot N^2 \frac{A}{l}; \quad \frac{L}{L_0} = \mu_r = \frac{0{,}5}{0{,}025} = 200.$$

Aplicaţia 4. *Cîte spire ar trebui adăugate solenoidului din aplicaţia 3 fără miez de fier ca să aibă inductivitatea egală cu cazul în care are miez, ştiind că* $N = 100$ *spire?*

Fie N_1 acest număr. Scriem:

$$\mu_0\mu_r \, N^2 \frac{A}{l} = \mu_0 (N + N_1)^2 \frac{A}{l} \Rightarrow \frac{(N + N_1)^2}{N^2} = \mu_r;$$

$$\frac{N + N_1}{N} = \sqrt{200}; \quad 1 + \frac{N_1}{100} = \sqrt{200}; \quad N_1 = (\sqrt{200} - 1)\,100 = 1\,314 \text{ sp.}$$

○ **Observaţie.** Se vede din acest exemplu cîtă importanţă are miezul de fier pentru obţinerea unei inductivităţi mari. Lipsa sa este echivalentă cu creşterea de peste 13 ori a numărului de spire.

• **Inductivităţi proprii şi mutuale.** Considerăm două bobine înfăşurate pe acelaşi miez de lungime l, secţiune A şi permeabilitate $\mu = \mu_0\mu_r$, avînd N_1, respectiv N_2 spire (fig. 1.32) şi alimentate de curenţii i_1 şi i_2. Fie Φ_{f1} şi Φ_{f2} fluxurile fasciculare ce se stabilesc în miezul de fier. Fluxurile totale vor fi respectiv

$$\Phi_{11} = N_1\Phi_{f1} \text{ şi } \Phi_{21} = N_2\Phi_{f1} \text{ (dacă } i_2 = 0 \text{ şi } i_1 \neq 0)$$

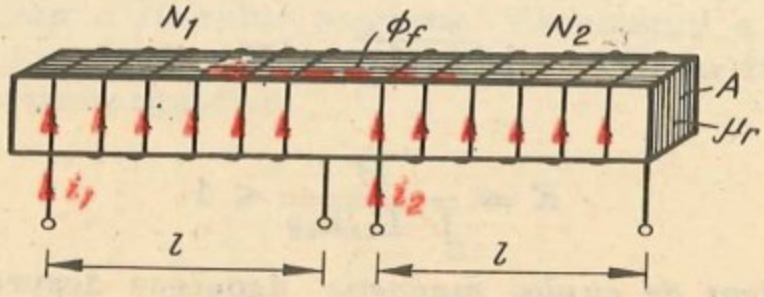


Fig. 1.32

și

$$\Phi_{12} = N_1 \Phi_{f2} \text{ și } \Phi_{22} = N_2 \Phi_{f2} \text{ (dacă } i_1 = 0 \text{ și } i_2 \neq 0).$$

Se numesc **inductivități proprii** ale bobinelor mărimile:

$$L_{11} = \frac{\Phi_{11}}{i_1} \qquad (1.29, a)$$

$$L_{22} = \frac{\Phi_{22}}{i_2} \qquad (1.29, b)$$

Se numesc **inductivități mutuale** ale bobinelor mărimile:

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_2} \qquad (1.30, a)$$

$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} \qquad (1.30, b)$$

Inductivitățile mutuale se măsoară ca și cele proprii în *henry* (H).
Observînd că

$$\Phi_{f1} = \mu \frac{N_1 i_1}{l} A \text{ și } \Phi_{f2} = \mu \frac{N_2 i_2}{l} A,$$

din formulele de definiție (1.29) și (1.30) obținem

$$L_{11} = \mu \frac{N_1^2}{l} A;\ L_{22} = \mu \frac{N_2^2}{l} A \text{ și } L_{12} = L_{21} = \mu \frac{N_1 N_2}{l} A. \qquad (1.30, c)$$

Se mai notează $M = L_{12} = L_{21}$.

○ **Notă.** Aceste relații de calcul sînt valabile numai pentru solenoizi; formulele de definiție (1.29) — (1.30) sînt însă valabile în general.

Observăm că *în cazul solenoizilor*

$$L_{11} L_{22} = L_{12}^2 = M^2 \Rightarrow \sqrt{L_{11} L_{22}} = M.$$

În general:

$$\sqrt{L_{11} L_{22}} > M.$$

Raportul

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_{11} L_{22}}} \leqslant 1 \qquad (1.31)$$

se numește *coeficient de cuplaj magnetic* deoarece despre bobinele care au inductivitate mutuală se spune că sînt cuplate magnetic. Atunci cînd $K = 1$ se spune că bobinele sînt cuplate perfect.

• **Relaţiile lui Maxwell pentru inductivităţi.** Dacă bobinele sînt parcurse simultan de curenţii i_1 şi i_2, fluxurile trebuie însumate. Se obţine

$$\boxed{\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = L_{11}i_1 + L_{12}i_2}\ ; \qquad \boxed{\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} = L_{21}i_1 + L_{22}i_2}\ . \tag{1.32}$$

Acèste relaţii se numesc relaţiile lui Maxwell pentru inductivităţi.

Aplicaţia 1. *Să se calculeze inductivităţile proprii şi mutuale pentru doi solenoizi cu miez comun avînd* $N_1 = 100$ *spire,* $N_2 = 1\,000$ *spire,* $A = 10\ cm^2$, $l = 1\ m$ *şi* $\mu_r = 100$.

$$L_{11} = \mu_0\mu_r N_1^2 \frac{A}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 10^4 \frac{10 \cdot 10^{-4}}{1} = 1{,}256 \cdot 10^{-3}\ \text{H};$$

$$L_{22} = \mu_0\mu_r N_2^2 \frac{A}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 10^6 \frac{10 \cdot 10^{-4}}{1} = 1{,}256 \cdot 10^{-1}\ \text{H};$$

$$M = L_{12} = L_{21} = \mu_0\mu_r N_1 N_2 \frac{A}{l} = 4\pi\ 10^{-7} \cdot 100 \cdot 100 \cdot 1\,000 \frac{10 \cdot 10^{-4}}{l} = 1{,}256 \cdot 10^{-3}\ \text{H}.$$

Se observă că $M = \sqrt{L_{11}L_{22}}$, deci $K = 1$.

Aplicaţia 2. *Două bobine cuplate magnetic au* $L_{11} = 0{,}05\ H$, $L_{22} = 0{,}2\ H$ *şi coeficientul de cuplaj* $K = 0{,}3$. *Să se determine* M.

$$M = K\sqrt{L_{11}L_{22}} = 0{,}3 \cdot \sqrt{5 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-1}} = 0{,}3 \cdot 10^{-1} = 0{,}03\ \text{H}.$$

Aplicaţia 3. *Să se calculeze fluxurile totale prin cele două bobine din aplicaţia 2, ştiind că* $i_1 = 1\ A$ *şi* $i_2 = 0{,}2\ A$, *sensurile curenţilor fiind alese astfel încît fluxurile lor să se adune.*

Aplicăm relaţiile lui Maxwell (1.32):

$$\Phi_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 = 0{,}05 \cdot 1 + 0{,}03 \cdot 0{,}2 = 0{,}056\ \text{Wb};$$

$$\Phi_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 = 0{,}03 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}07\ \text{Wb}.$$

C. ELECTROTEHNICA FENOMENELOR DE INDUCŢIE ELECTROMAGNETICĂ

1. Legea inducţiei electromagnetice

Se numeşte fenomen de **inducţie electromagnetică** *producerea unei t.e.m. prin variaţia în timp a fluxului magnetic.* Fenomenul a fost descoperit de marele fizician englez *Michael Faraday* (1791—1867) în 1831. El a formulat **legea inducţiei electromagnetice**

$$\boxed{e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}}\ , \tag{1.33}$$

unde fluxul Φ şi t.e.m. e au sensuri de referinţă asociate după regula burghiului (fig. 1.33).

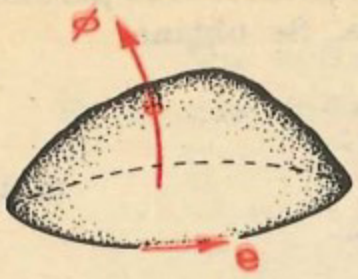


Fig. 1.33

Enunțul legii este următorul: *tensiunea electromotoare indusă în lungul unui contur închis este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic prin suprafața conturului* *.

Dacă conturul este conductor, de exemplu o spiră închisă sau o bobină formată din mai multe spire, în el se produce un curent $i = \frac{e}{R}$, care se numește *curent de inducție* (curent indus).

Sensul curentului indus este dat de o **regulă formulată de H.F.E. Lenz** în 1833.

Regula spune: *curentul indus are un astfel de sens încît, prin cîmpul magnetic pe care-l produce, se opune variației în timp a fluxului magnetic inductor.*

Variația fiuxului magnetic se poate produce fie datorită variației în timp a cîmpului magnetic *(fenomen de inducție electromagnetică prin transformare)*, fie datorită mișcării sau deformării conturului într-un cîmp constant *(fenomen de inducție electromagnetică prin mișcare)*, fie pe ambele căi.

2. Inducția electromagnetică prin transformare

• **Considerăm un solenoid** avînd N spire străbătute de fluxul fascicular $\Phi_f(t)$. T.e.m. indusă în conturul format din cele N spire va fi

$$e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta(N\Phi_f)}{\Delta t} = -N\frac{\Delta\Phi_f}{\Delta t}. \qquad (1.34)$$

Aplicație. *Fie $N = 100$ spire și presupunem că fluxul fascicular scade uniform de la $\Phi_f = 0{,}1$ Wb la zero în 10 s. Să se afle t.e.m. indusă.*

---

* În relația (1.33) intervine raportul $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, care exprimă viteza medie de variație a fluxului în intervalul de timp $(t;\ t + \Delta t)$ cu durata arbitrară Δt. Această mărime este în general dependentă de momentul t și de durata Δt a intervalului.

Dacă durata Δt se consideră arbitrar de mică (tinde către zero), raportul respectiv devine independent de Δt și definește ceea ce numim viteză instantanee de variație a mărimii considerate la momentul t. Matematic scriem:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{d\Phi}{dt},$$

unde raportul $\frac{d\Phi}{dt}$ se numește *derivată a funcției* $\Phi = \Phi(t)$ în raport cu variabila t.

Pentru tehnică prezintă interes mai ales *mărimile cu variație sinusoidală în timp*, de exemplu:

$$\Phi = \Phi_m \sin \omega t.$$

Derivata acestei funcții este

$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega\Phi_m \cos \omega t$$

Dacă variația în timp este de forma $\Phi = \Phi_m \cos \omega t$ derivata este

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\omega\Phi_m \sin \omega t$$

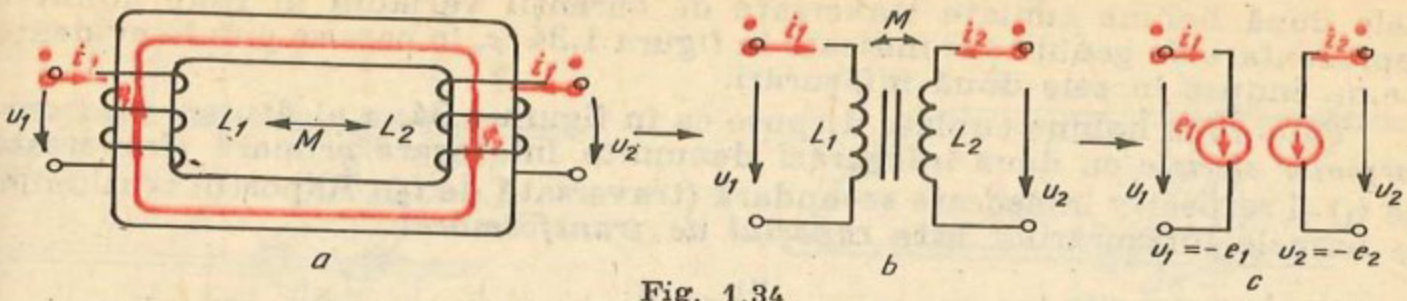


Fig. 1.34

Vom găsi:

$$e = -N\frac{\Delta\Phi_f}{\Delta t} = -100\,\frac{0-0{,}1}{10} = +1\ \text{V}.$$

● **Considerăm două bobine cuplate** situate pe același miez magnetic, avînd inductivitățile proprii $L_{11} = L_1$ și $L_{22} = L_2$ și inductivitatea mutuală $L_{12} = L_{21} = M$ (fig. 1.34, *a*). Presupunem bobinele traversate de curenții variabili în timp i_1 și i_2, care determină în miezul magnetic comun cîmpuri magnetice în același sens (cuplaj adițional). Fluxurile magnetice, prin spirele celor două înfășurări, cu sensuri de referință asociate după regula burghiului cu sensurile curenților respectivi, sînt date de relațiile lui Maxwell:

$$\begin{cases} \Phi_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 = L_1 i_1 + Mi_2; \\ \Phi_2 = L_{21}i_1 + L_{12}i_2 = Mi_1 + L_2 i_2. \end{cases}$$

Deoarece pentru curenți variabili în timp fluxurile magnetice sînt variabile în timp, în spire se vor induce t.e.m.

$$e_1 = -\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} \text{ și } e_2 = -\frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} \qquad (1.35,\ a)$$

unde sensurile t.e.m. în cele două înfășurări coincid cu sensurile curenților. Înlocuind cu aceste relații fluxurile Φ_1 și Φ_2, obținem:

$$\begin{cases} e_1 = -L_1\dfrac{\Delta i_i}{\Delta t} - M\dfrac{\Delta i_2}{\Delta t} = e_{11} + e_{12}; \\ e_2 = -M\dfrac{\Delta i_i}{\Delta t} - L_2\dfrac{\Delta i_2}{\Delta t} = e_{21} + e_{22}. \end{cases}$$

T.e.m. e_{11} și e_{22} determinate de variația în timp a curenților proprii ai celor două bobine se numesc *t.e.m. de autoinducție*; t.e.m. e_{12} și e_{21} determinate în fiecare bobină de variația în timp a curentului din cealaltă bobină se numesc *t.e.m. de inducție mutuală*. Dacă u_1 și u_2 sînt tensiunile la bornele bobinelor, cu sensuri de referință asociate cu cele ale curenților după regula utilizată pentru receptoare, și dacă conductoarele bobinelor au rezistențe neglijabile, putem scrie:

$$\begin{cases} u_1 = -e_1 = L_1\dfrac{\Delta i_i}{\Delta t} + M\dfrac{\Delta i_2}{\Delta t}; \\ u_2 = -e_2 = M\dfrac{\Delta i_1}{\Delta t} + L_2\dfrac{\Delta i_2}{\Delta t}. \end{cases} \qquad (1.35,\ b)$$

În schemele electrice, bobinele cuplate din figura 1.34, *a* se reprezintă ca în figura 1.34, *b* unde cu un punct roșu s-a indicat pentru fiecare bobină borna de intrare a curentului pentru care cîmpurile magnetice au același sens în circuitul magnetic comun (acestea sînt *bornele* denumite *polarizate*).

Cele două bobine cuplate traversate de curenții variabili în timp admit o reprezentare de genul celei indicate în figura 1.34, *c*, în care se pun în evidență t.e.m. induse în cele două înfășurări.

Cele două bobine cuplate dispuse ca în figura 1.34, *a* alcătuiesc un *transformator electric* cu două înfășurări denumite înfășurare primară (traversată de i_1) și respectiv înfășurare secundară (traversată de i_2). Raportul tensiunilor la bornele înfășurărilor este *raportul de transformare*:

$$\frac{u_1}{u_2} = n$$

Deci utilizînd pentru inductanțele L_{11}, L_{22} și $L_{12} = L_{21} = M$ relațiile 1.30, *c*, obținem pentru n expresia:

$$n = \frac{N_1^2 \frac{\Delta i_1}{\Delta t} + N_1 N_2 \frac{\Delta i_2}{\Delta t}}{N_1 N_2 \frac{\Delta i_1}{\Delta t} + N_2^2 \frac{\Delta i_2}{\Delta t}} = \frac{N_1 \left[\frac{\Delta i_1}{\Delta t} + N_2 \frac{\Delta i_2}{\Delta t}\right]}{N_2 \left[\frac{\Delta i_1}{\Delta t} + N_2 \frac{\Delta i_2}{\Delta t}\right]} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Obținem deci:

$$\boxed{\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = n} \qquad (1.35, c)$$

Aplicația 1. *Să se determine t.e.m. de autoinducție și de inducție mutuală în două bobine cuplate magnetic, avînd* $L_{11} = 0{,}1\ H$; $L_{22} = 0{,}05\ H$; $L_{12} = L_{21} = M = 0{,}01\ H$, *știind că inițial curenții din bobine sînt* $i_1 = 5\ A$ *și* $i_2 = 10\ A$ *și scad uniform la zero în 0,1 s.*

Scriem:

$$\frac{\Delta i_1}{\Delta t} = \frac{0 - 5}{0{,}1} = -50\ \frac{A}{s}; \quad \frac{\Delta i_2}{\Delta t} = \frac{0 - 10}{0{,}1} = -100\ \frac{A}{s}.$$

Aplicînd relațiile (1.35) obținem:

$$e_1 = e_{11} + e_{12} = 0{,}1 \cdot 50 + 0{,}01 \cdot 100 = 5 + 1 = 6\ V;$$
$$e_2 = e_{21} + e_{22} = 0{,}01 \cdot 50 + 0{,}05\ \ 100 = 0{,}5 + 5 = 5{,}5\ V.$$

○ **Observație.** Aceste t.e.m. sînt constante numai în timpul scăderii curenților, adică timp de 0,1 s.

Aplicația 2. *Într-o bobină avînd* $L = 0{,}05\ H$, *intensitatea curentului crește uniform de la zero la* $I = 10\ A$ *în timp de 10 s. Care este t.e.m. de autoinducție?*

$$e = -L \frac{\Delta i}{\Delta t}; \quad \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{10 - 0}{10} = 1\ \frac{A}{s};$$
$$e = -0{,}05 \cdot 1 = -0{,}05\ V.$$

○ **Se observă că** t.e.m. fiind negativă, are tendința de a produce un curent negativ, care se opune creșterii curentului *(regula lui Lenz)*.

Aplicația 3. *În bobina din aplicația 2 se induce o* $e = -0{,}1\ V = const.$ *Știind că inițial curentul este nul, se cere să se determine valoarea sa după 15 s.*

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = -\frac{e}{L} = \frac{0{,}1}{0{,}05} = 20\ \frac{A}{s} = const.$$

Dacă curentul crește cu 20 A/s, atunci după 15 s el va fi:

$$i_{15} = 20\ A/s \cdot 15\ s = 300\ A.$$

3. Inducția electromagnetică prin mișcare

● Considerăm o bară conductoare care alunecă cu viteza $\vec{v}$ pe două șine paralele conductoare într-un **cîmp magnetic uniform** de inducție $\vec{B}$,

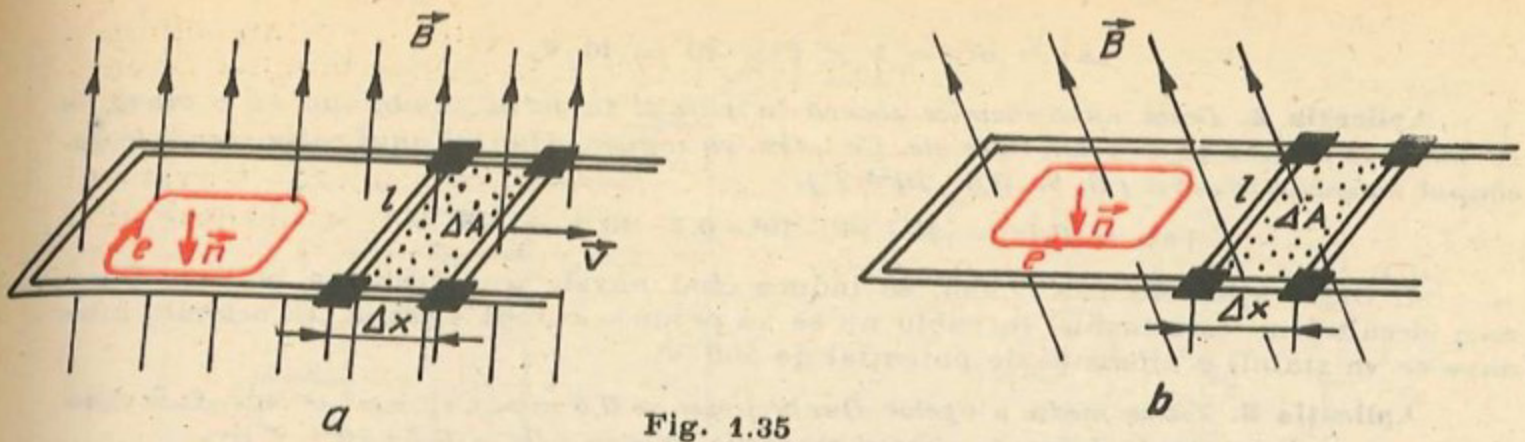


Fig. 1.35

perpendicular pe planul şinelor (fig. 1.35, *a*). Inducţia magnetică este constantă în timp.

Fluxul magnetic prin suprafaţa conturului dreptunghiular format de şine şi bară variază în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$ cu

$$\Delta\Phi = \Phi(t + \Delta t) - \Phi(t).$$

Pentru sensul de referinţă din figură, variaţia fluxului este

$$\Delta\Phi = \vec{B}\vec{n}\, A(t + \Delta t) - \vec{B}\vec{n}\, A(t),$$

$A(t)$ şi $A(t + \Delta t)$ fiind aria suprafeţei traversate de flux la momentele respective de timp.

Deoarece $\vec{B}$ are orientare opusă sensului de referinţă, fluxul prin suprafaţa respectivă este negativ şi deci:

$$\Delta\Phi = \vec{B}\vec{n}\, \Delta A = -Bl\Delta x = -Blv\Delta t.$$

Conform legii inducţiei electromagnetice, în contur se induce o t.e.m.

$$e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

unde sensul de referinţă al t.e.m. este asociat cu cel al fluxului după regula burghiului (v. fig. 1.35, *a*).

Rezultă în final o t.e.m.

$$e = -\frac{-Blv\Delta t}{\Delta t} = Blv$$

Această t.e.m. produce în conturul conductor respectiv un curent care, prin cîmpul magnetic pe care-l generează (opus cîmpului inductor), se opune variaţiei în timp a fluxului (în cazul de faţă — creşterii fluxului).

● **În cazul cînd inducţia nu este normală pe suprafaţa conturului,** variaţia de flux va fi (fig. 1.35, *b*):

$$\Delta\Phi = \vec{B}\vec{n}\, \Delta A = B\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\Delta A = Blv\,\Delta t \sin\alpha.$$

iar t.e.m. indusă prin mişcare va fi:

$$e = +Blv \sin\alpha. \qquad (1.37)$$

Aplicaţia 1. *Să se calculeze t.e.m. în conductorul unei maşini electrice avînd lungimea* $l = 1$ *m, care se mişcă cu* $v = 10$ *m/s într-un cîmp normal pe conductor şi viteză, avînd* $B = 1$ *T.*

$$|e| = Blv = 1 \times 1 \times 10 = 10 \text{ V}.$$

Aplicația 2. *Două nave cosmice zboară în paralel în jurul pămîntului cu o viteză de 10 km/s, la o distanță de 1 km între ele. Ce t.e.m. va induce, în lungul unui cablu care le leagă, cîmpul magnetic terestru ($B_t = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ T)?*

$$|e| = B_t lv = 10 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4} = 500 \text{ V}.$$

○ **Observație.** Această t.e.m. se induce cînd navele trec deasupra polilor. Deoarece circuitul nu este închis, în cablu nu se va produce curent electric. În schimb, între nave se va stabili o diferență de potențial de 500 V.

Aplicația 3. *Viteza medie a apelor Dunării este de 0,5 m/s. Ce t.e.m. se va induce între două maluri distanțate la 1 km, în cîmpul magnetic terestru ($B_t = 0{,}3 \cdot 10^{-4}$ T)?*

$$|e| = Blv_{med} = 0{,}3 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3 \cdot 0{,}5 = 0{,}015 \text{ V} = 15 \text{ mV}.$$

○ **Observație.** Pe această cale *M. Faraday* a încercat să măsoare viteza medie a apelor fluviului Tamisa.

D. ENERGIA MAGNETICĂ ȘI FORȚELE MAGNETICE

1. Energia magnetică

Deoarece cîmpul magnetic exercită forțe magnetice și poate produce lucru mecanic, trebuie să admitem că acest cîmp este capabil să acumuleze energie pe care s-o poată cheltui pentru producerea lucrului mecanic. Această energie se numește *energie magnetică*.

Încercăm **să găsim o expresie a energiei magnetice acumulate într-o bobină.** În acest scop, considerăm o bobină ideală (adică cu rezistență nulă) avînd inductivitatea L. Bobina este alimentată începînd de la un moment dat, $t = 0$, de o sursă de curent $i(t)$ (fig. 1.36) care crește liniar cu timpul. Ne fixăm atenția asupra unui interval de timp $(0; T)$, în care curentul crește liniar de la $i(0) = 0$ la $i(T) = I$ (fig. 1.37, *a*). Această variație în timp a curentului va produce o t.e.m. de autoinducție

$$e = -L\frac{\Delta i}{\Delta t} = -L\frac{I-0}{T-0} = -L\frac{I}{T}.$$

Bobina se comportă deci ca o sursă de t.e.m. la bornele căreia se stabilește tensiunea (fig. 1.37, *b*)

$$U_b = -e = L\frac{I}{T} = const. \qquad (1.38)$$

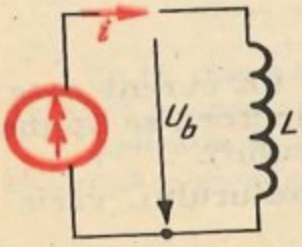


Fig. 1.36

La un moment dat $t_k \in (0; T)$, bobina va absorbi puterea

$$p_k = U_b i(t_k),$$

iar energia absorbită în intervalul Δt_k va fi:

$$\Delta W_k = p_k \Delta t_k = U_b i(t_k) \Delta t_k.$$

Energia totală absorbită în intervalul $(0; T)$ va fi

$$W = \sum_{(k)} \Delta W_k = \sum_{(k)} U_b i(t_k) \Delta t_k = U_b \sum_{(k)} i(t_k) \Delta t_k. \qquad (1.39)$$

Dar $i(t_k)\Delta t_k$ reprezintă aria dreptunghiului elementar haşurat în figura 1.37, *a*.

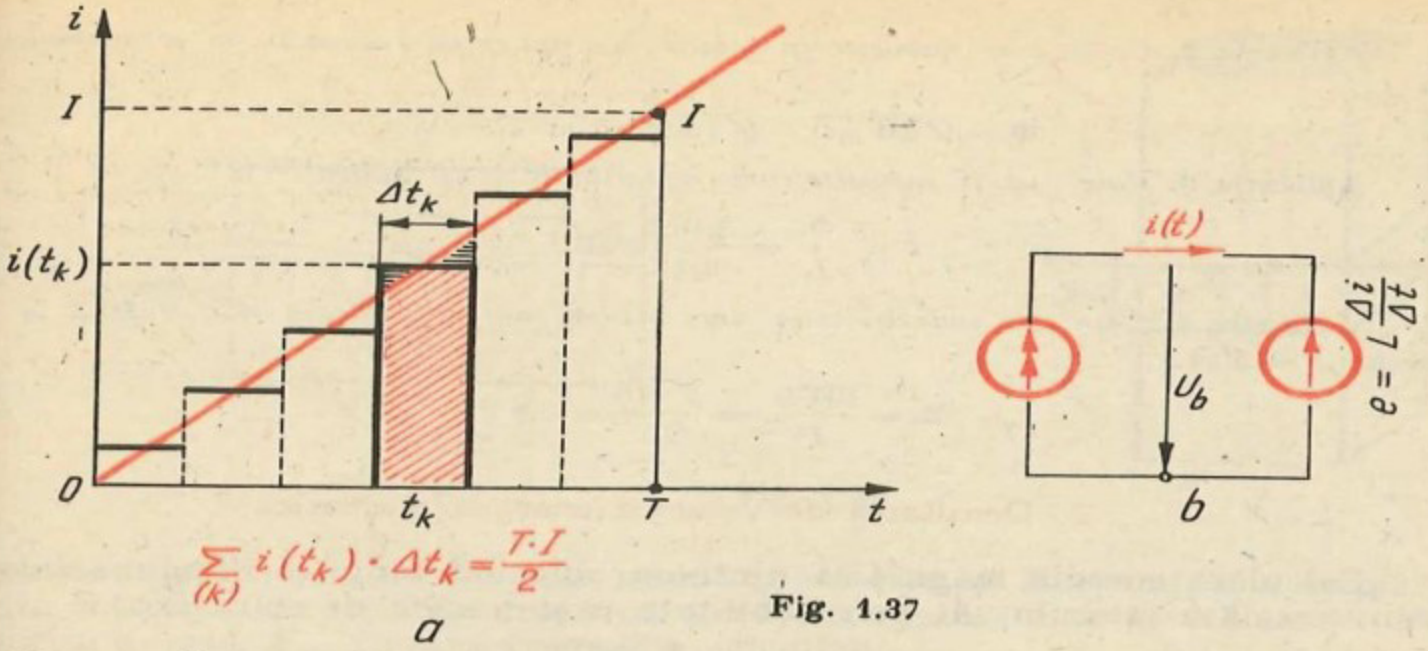


Fig. 1.37

Deci suma din expresia de mai sus va fi suma ariilor tuturor dreptunghiurilor din intervalul $(0;\ T)$, adică aria triunghiului OTI:

$$\sum_k i(t_k)\Delta t_r = A_{OTI} = \frac{TI}{2}.$$

Revenind în expresia (1.39), obţinem cu (1.38)

$$W = U_b \frac{TI}{2} = L\frac{I}{T}\cdot\frac{TI}{2} = \frac{1}{2}LI^2.$$

Fiind primită de la o sursă şi nedisipată în interiorul bobinei deoarece aceasta are rezistenţă nulă, această energie este acumulată integral în cîmpul magnetic al bobinei; deci

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 \qquad (1.40)$$

Alegînd drept I oricare dintre valorile $i(t)$ şi ţinînd seama că:

$$\Phi = Li,$$

obţinem următoarele expresii echivalente ale energiei magnetice acumulate în bobină:

$$W_m = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\Phi i = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L} \qquad (1.41)$$

○ **Notă.** Deşi au fost deduse pentru o bobină ideală, *expresiile (1.41) ale energiei magnetice sînt valabile în general, adică pentru orice fel de bobină şi orice fel de variaţie a curentului*, ele depinzînd numai de valorile fluxului magnetic şi intensităţii curentului la un moment dat.

Aplicaţia 1. *Să se determine energia magnetică dintr-o bobină cu $L = 0{,}1$ H, parcursă de $I = 10$ A.*

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = 0{,}1\cdot\frac{10^2}{2} = 5\text{ J}.$$

Aplicația 2. *Ce flux se stabilește în bobina din aplicația 1 dacă în ea se acumulează 50 J?*

$$\Phi = \sqrt{2W_m L} = \sqrt{100 \cdot 0{,}1} = 3{,}16 \text{ Wb}.$$

Aplicația 3. *Care va fi intensitatea curentului în cazul aplicației 2?*

$$I = \frac{\Phi}{L} = \frac{3{,}16}{0{,}1} = 31{,}6 \text{ A}.$$

Aplicația 4. *Care este inductivitatea unei bobine care acumulează $W_m = 10$ J la un curent $I = 5$ A?*

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{2 \cdot 10}{25} = 0{,}8 \text{ H}.$$

2. Densitatea de volum a energiei magnetice

Calculăm energia magnetică dintr-un solenoid lung, de lungime l, arie transversală a miezului A, permeabilitate μ și număr de spire N:

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}.$$

Dar $\Phi = NBA$; $L = \mu \dfrac{N^2 A}{l}$ și deci

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{N^2 B^2 A^2}{\mu \dfrac{N^2 A}{l}} = \frac{B^2}{2\mu} Al = \frac{B^2}{2\mu} V,$$

unde $V = Al$ este volumul miezului solenoidului.

Se numește **densitate de volum a energiei magnetice** *energia magnetică raportată la unitatea de volum*:

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{B^2}{2\mu}.$$

Deoarece $B = \mu H$, obținem și următoarele expresii echivalente:

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{BH}{2} = \mu \frac{H^2}{2} \qquad (1.42)$$

Aplicația 1. *Să se determine densitatea de volum a energiei magnetice pentru un cîmp $B = 1$ T în vid.*

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = \frac{10^7}{8\pi} = 3{,}97 \cdot 10^5 \text{ J/m}^3.$$

Aplicația 2. *Care va fi densitatea de energie pentru același cîmp într-un mediu cu $\mu_r = 397$?*

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu_r} = \frac{3{,}97 \cdot 10^5}{397} = 10^3 \text{ J/m}^3.$$

○ **Observație.** În raport cu capacitatea cîmpului electric de a acumula energie, capacitatea cîmpului magnetic este cu mult mai mare la valorile uzuale ale inducției care se obțin în tehnică.

3. Forța magnetică

Considerăm electromagnetul din figura 1.38, *a*, în care o porțiune a circuitului magnetic, denumită *armătură mobilă*, se poate deplasa. Fie *d* lun-

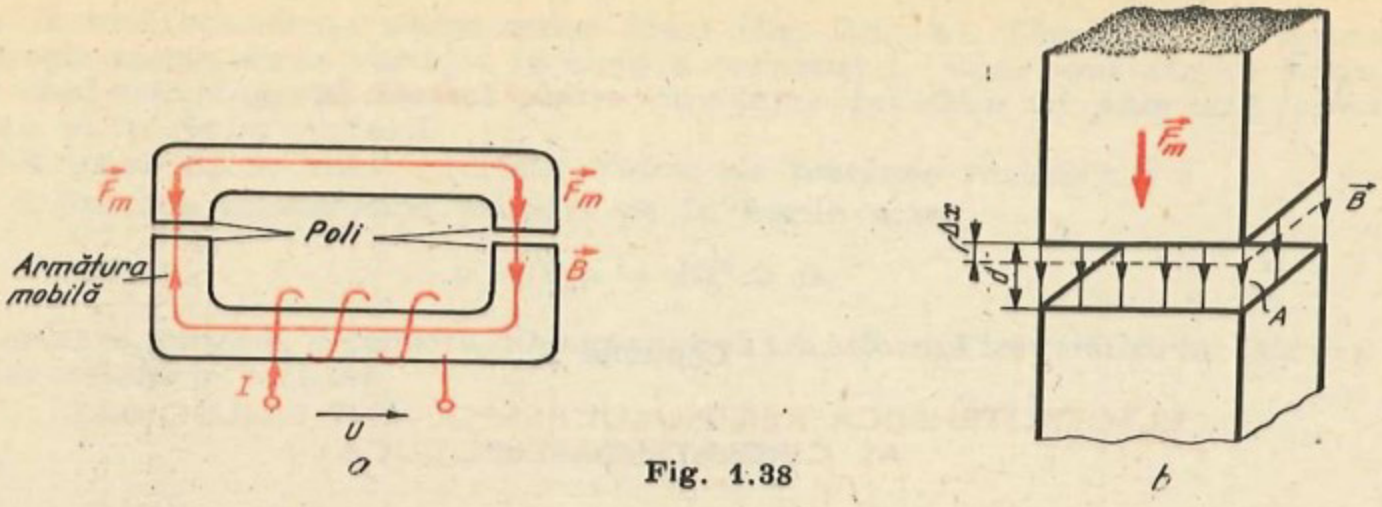


Fig. 1.38

gimea interstiţiului dintre poli, numit şi *întrefier*, şi B — inducţia magnetică din întrefier. Experienţa arată că armătura mobilă este atrasă înspre polul fix cu o forţă F_m, pe care vrem să o calculăm.

Lucrul mecanic elementar efectuat la o deplasare Δx în jos (fig. 1.38, *b*) va fi efectuat pe seama energiei magnetice a cîmpului din întrefier, care va scădea odată cu descreşterea întrefierului:

$$F_m \Delta x = \frac{B^2}{2\mu} A \cdot \Delta x = -\Delta W_m$$

(energia scade datorită micşorării volumului: $\Delta W_m = W_{m\,final} - W_{m\,initial} =$

$$= \frac{B^2}{\mu 2_0} A(d - \Delta x) - \frac{B^2}{2\mu_0} A \cdot d = -\frac{B^2 A}{2\mu_0} \Delta x.$$

Împărţind cu Δx, obţinem

$$F_m = -\frac{\Delta W_m}{\Delta x} = \frac{B^2}{2\mu_0} A. \qquad (1.43)$$

Forţa dată de relaţia (1.43) poartă numele de *forţă portantă* a electromagneţilor.

Aplicaţia 1. *Să se calculeze forţa portantă a unui electromagnet avînd* $A = 1\ dm^2$ *şi* $B = 1\ T$.

$$F_m = \frac{B^2}{2\mu_0} A = \frac{1^2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 3{,}97 \cdot 10^3\ \text{N}.$$

Aplicaţia 2. *Să se determine inducţia magnetică de sub polul unui electromagnet capabil să dezvolte o forţă de 5 000 N, avînd aria 3* dm^2.

$$B = \sqrt{\frac{2\mu_0 F_m}{A}} = \sqrt{\frac{8\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-2}}} = 0{,}647\ \text{T}.$$

Aplicaţia 3. *Să se determine aria polului unui electromagnet care la inducţia* $B = 1{,}5\ T$ *dezvoltă o forţă portantă de 10 000 N.*

$$A = \frac{2\mu_0 F_m}{B^2} = \frac{8\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^4}{2{,}25} = 1{,}12 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^2 = 1{,}12\ \text{dm}^2.$$

○ **Notă.** Aplicaţiile arată că *forţele magnetice sînt importante la valori uzuale ale inducţiei obţinute în tehnică.* De aceea, electromagneţii se utilizează chiar pentru realizarea unor macarale electromagnetice.

Capitolul 2

ELECTROTEHNICA REGIMULUI PERMANENT SINUSOIDAL AL CIRCUITELOR ELECTRICE

A. ELEMENTE IDEALE DE CIRCUIT ÎN REGIM VARIABIL

1. Elemente de circuit pasive

Rezistorul, bobina şi condensatorul sînt elemente dipolare pasive de circuit. Vom asocia atunci sensul tensiunii u aplicate la borne sensului curentului i cu regula de la receptoare (fig. 2.1).

În regim variabil, tensiunea şi curentul sînt mărimi variabile în timp. S-a notat cu litera mică a simbolului mărimii respective valoarea pe care acea mărime o are la un moment oarecare t, adică *valoarea* sa *instantanee*.

Produsul dintre tensiunea instantanee la borne şi curentul instantaneu se numeşte *putere instantanee:*

$$p = ui. \tag{2.1}$$

a. Rezistorul ideal

• **Tensiunea la bornele unui rezistor ideal** este proporţională cu intensitatea curentului:

$$u_R = Ri \tag{2.2}$$

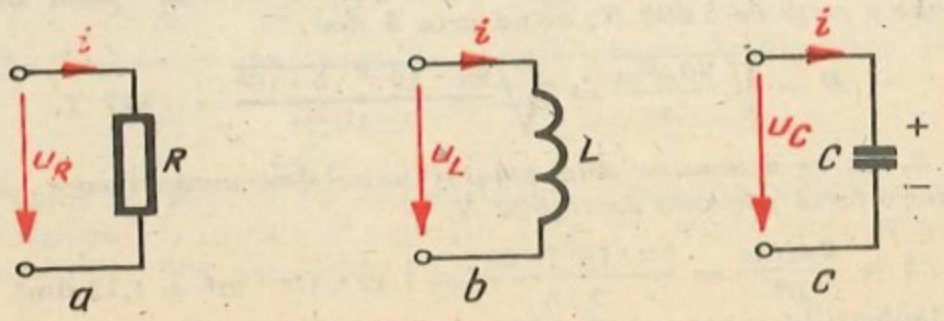


Fig. 2.1

unde R este rezistența rezistorului ideal (fig. 2.1, *a*). Tensiunea la borne urmărește instantaneu variația în timp a curentului. Vom constata că *rezistorul ideal este singurul element pentru care legea lui Ohm își păstrează forma din c.c. și în regim variabil.*

Mărimea u_R se mai numește *cădere de tensiune rezistivă.*

• **Puterea instantanee primită pe la borne este:**

$$p = u_R i = Ri^2 \geqslant 0.$$

Prin urmare, puterea p primită din exterior se transformă ireversibil în căldura Ri^2 dezvoltată în rezistor.

b. *Bobina ideală*

• **Tensiunea la bornele bobinei ideale** *este proporțională cu viteza de creștere în timp a curentului:*

$$u_L = L \frac{\Delta i}{\Delta t} \text{ (v. cap. 1, subcap. C.1 — notă),} \qquad (2.3)$$

unde L este inductivitatea bobinei. Mărimea u_L se mai numește *cădere de tensiune inductivă.*

• **La limită, pentru** $\Delta t \to 0$ **ecuația de circuit este:**

$$u_L = L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \qquad (2.3')$$

Ea se obține prin aplicarea legii inducției electromagnetice. Fluxul $\Phi = Li$ prin bobină este variabil în timp, astfel că se induce tensiunea electromotoare $e = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$. Pentru o bobină ideală, rezistența este neglijabilă și nu există cădere de tensiune rezistivă. T.e.m. indusă este atunci egală, în modul, cu căderea de tensiune la bornele bobinei. Ținînd cont și de sensul t.e.m. induse, se obține $e = -u_L$, deoarece curentul este asociat tensiunii la borne după regula de la receptoare (fig. 2.1, *b*). Prin urmare,

$$u_L = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Li) = L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

• **Puterea instantanee are expresia**

$$p = u_L i = Li \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} Li^2\right) = \frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t} \gtrless 0, \text{ deoarece}$$

energia magnetică a unei bobine are expresia

$$W_m = \frac{1}{2} Li^2 \text{ (v. cap. 1, rel. 1.41).}$$

Bobina ideală *are proprietatea ca toată energia electrică pe care o absoarbe pe la borne să o acumuleze sub formă de energie magnetică.*

⊙ **Observație.** Procesul este reversibil: energia magnetică acumulată poate fi restituită integral pe la borne, sub formă de energie electromagnetică. Prin urmare, *o bobină nu creează energie, ci doar o schimbă cu exteriorul.*

Bobina schimbă instantaneu puterea electromagnetică cu exteriorul. *Cînd* $p > 0$, bobina primeşte energie şi energia magnetică acumulată creşte. *Dacă* $p < 0$, bobina cedează energie şi energia magnetică acumulată descreşte.

c. *Condensatorul ideal*

• **Intensitatea curentului prin condensatorul ideal** *este proporţională cu viteza de creştere în timp a tensiunii aplicate la borne:*

$$i = C \frac{\Delta u_C}{\Delta t}, \tag{2.4}$$

unde C este capacitatea condensatorului.

• **La limită, pentru** $\Delta t \to 0$ **ecuaţia de circuit** este

$$\boxed{i = C \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}} \tag{2.4'}$$

Ea se obţine prin aplicarea legii de conservare a sarcinii electrice.

Deoarece sarcina $q = Cu_C$ pe armăturile condensatorului este variabilă în timp, prin condensator va trece curentul

$$i = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-q) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Cu_C) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}.$$

În aplicarea legii s-a ţinut seama că, în raport cu sensurile asociate după regula de la receptoare, curentul iese din armătura încărcată negativ (fig. 2.1, *c*).

• Pentru un condensator ideal, **puterea instantanee** este

$$p = u_C i = u_C C \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} C u_C^2\right) = \frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}t} \gtrless 0,$$

deoarece energia acumulată în cîmpul electric al unui condensator este

$$W_e = \frac{1}{2} C u_C^2.$$

Condensatorul ideal *are proprietatea ca toată energia pe care o absoarbe pe la borne să o acumuleze sub formă de energie electrică.*

Ca şi bobina ideală, condensatorul ideal schimbă instantaneu puterea electromagnetică cu exteriorul. Atunci cînd se primeşte energie de la borne, energia electrică acumulată creşte şi atunci cînd se cedează energie, energia acumulată descreşte.

Aplicaţia 1. *Intensitatea curentului prin bobina de deflexie a tuburilor cinescop trebuie să aibă forma de undă în dinţi de ferăstrău, indicată în figura 2.2, a. Să se determine forma de undă a tensiunii care trebuie aplicată la bornele bobinei dacă:*

a) *bobina este admisă ideală;*

b) *bobina este echivalentă cu o bobină ideală în serie cu un rezistor ideal.*

a) În intervalul $0 \leqslant t \leqslant T_1$ curentul este liniar crescător în timp: $i = (I_0/T_1)t$ şi atunci

$$u_L = L \frac{\Delta i}{\Delta t} = L \frac{I_0}{T_1}.$$

În al doilea interval, $T_1 \leqslant t \leqslant T$, dependenţa de timp este liniar descrescătoare: $i = I_0 - (I_0/T_2)(t - T_1)$, unde $T_2 = T - T_1$. Rezultă:

$$u_L = L \frac{\Delta i}{\Delta t} = -L \frac{I_0}{T_2}.$$

Tensiunea la borne trebuie să aibă forma de undă dreptunghiulară indicată în figura 2.2, *b*.

b) Tensiunea aplicată la borne fiind o sumă a căderilor de tensiune inductivă şi rezistivă,

$$u = u_L + u_R = L\frac{\Delta i}{\Delta t} + ri,$$

peste componenta dreptunghiulară se suprapune o componentă proporţională cu intensitatea curentului. Rezultă forma de undă reprezentată în figura 2.2, *c*.

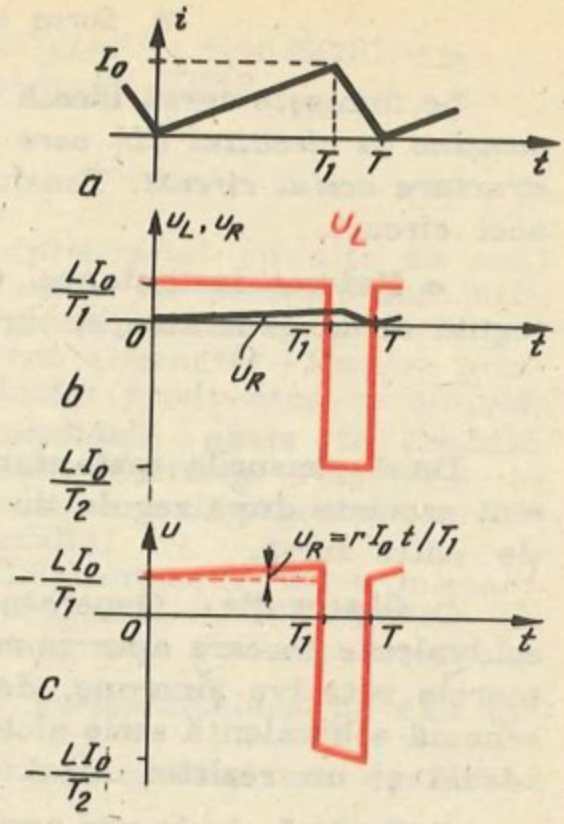


Fig. 2.2.

Aplicaţia 2. *Un curent liniar crescător în timp* $i = kt$, *cu* $k = 2$ *mA/s, străbate o bobină ideală cu inductivitatea* $L = 50$ *mH. Să se calculeze:*

a) *puterea instantanee primită pe la borne;*

b) *energia magnetică acumulată la* $t_1 = 1$ *s şi* $t_2 = 2$ *s.*

a) Deoarece

$$u = L\frac{di}{dt} = Lk = 50\cdot10^{-3} \times 2\cdot10^{-3}\,\frac{\text{Wb}}{\text{s}} = 10^{-4}\,\text{V},$$

rezultă:

$$p = ui = 10^{-4} \times 2\cdot10^{-3}\,t = 2\cdot10^{-7}\,t\ \text{(W)}.$$

b) Energia magnetică este:

$$W_m = \frac{1}{2}Li^2 = 0{,}5 \times 50\cdot10^{-3} \times (2\cdot10^{-3})^2t^2 = 10^{-7}\,t^2\ \text{(J)}.$$

Prin urmare, la $t = 1$s: $W_m = 10^{-7}$ J, iar la $t = 2$s: $W_m = 4\cdot10^{-7}$ J.

○ **Observaţie.** Unităţile de măsură utilizate satisfac relaţiile: 1 A × 1 H = 1 Wb; 1 Wb/s = 1 V; 1 W = 1 J/s.

2. Elemente de circuit active (surse ideale)

a. *Sursa ideală de tensiune (fig. 2.3, a)*

Se numeşte sursă ideală de tensiune *elementul dipolar activ de circuit care menţine în circuitul din care face parte o tensiune la borne dată* $u = e$, *independentă de structura acelui circuit.* Curentul debitat de sursă depinde însă de acel circuit.

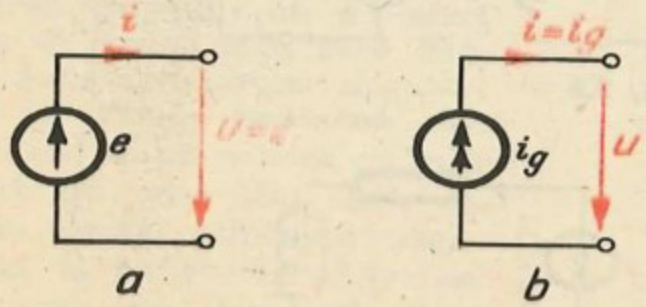


Fig. 2.3

• **Puterea instantanee** *cedată pe la borne*, în exterior, este

$$p = ui = ei.$$

Dacă i are sensul specificat (u şi i asociate după regula de la generatoare), $p > 0$ şi puterea este cedată în exterior. Puterea instantanee devine negativă şi este *primită* în momentele în care sensul curentului este inversat, adică u şi i sînt asociate după regula de la receptoare.

b. *Sursa ideală de curent (fig. 2.3, b)*

Se numeşte sursă ideală de curent *elementul dipolar activ de circuit care menţine în circuitul din care face parte un curent dat* $i = i_g$, *independent de structura acelui circuit.* **Tensiunea la bornele sursei este determinată însă de acel circuit.**

• **Puterea instantanee.** Cu sensurile reale ale lui u şi i asociate după regula de la generatoare, sursa *cedează* efectiv în exterior puterea

$$p = ui = ui_g.$$

Dacă sensurile instantanee reale ale tensiunii la borne şi curentului sînt asociate după regula de la receptoare, puterea este *primită* din exterior de către sursă.

o **Observaţie.** **Generatoarele reale pot fi reprezentate prin scheme echivalente în care apar numai elemente ideale. Astfel, de exemplu, generatoarele rotative sincrone, de tensiune sinusoidală, pot fi descrise printr-o schemă echivalentă serie alcătuită dintr-o sursă ideală de tensiune, o bobină ideală şi un rezistor ideal.**

Aplicaţia 1. *La bornele unei surse ideale de tensiune avînd* $e = 100\sqrt{2}\sin \omega t$ *sînt conectate succesiv un rezistor, o bobină şi un condensator (fig. 2.4). Care este tensiunea instantanee de la bornele celor trei elemente?*

Deoarece sursa menţine tensiunea la borne dată, independent de elementul legat la borne, tensiunea este $u = e = 100\sqrt{2}\sin \omega t$. Curentul instantaneu va fi însă diferit prin cele trei elemente.

Aplicaţia 2. *O sursă ideală de curent injectează curentul în dinţi de ferăstrău (fig. 2.2,a) printr-o bobină cu inductivitatea L şi rezistenţa r (fig. 2.5, a). Să se determine tensiunea la bornele sursei de curent.*

Curentul în dinţi de ferăstrău indicat în figura 2.2, *a* determină o cădere de tensiune la bornele bobinei avînd forma de undă indicată în figura 2.2, *c*. Tensiunea la bornele generatorului de curent este egală cu această cădere de tensiune $(u_L + u_r)$.

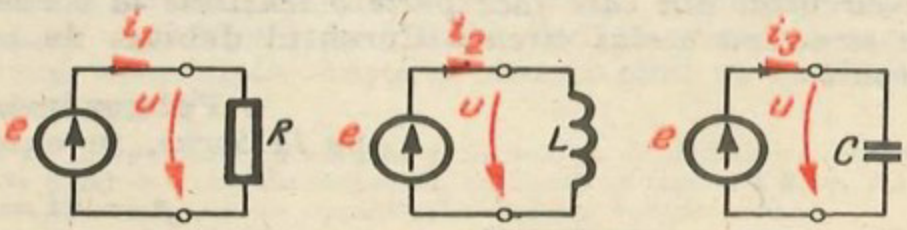


Fig. 2.4

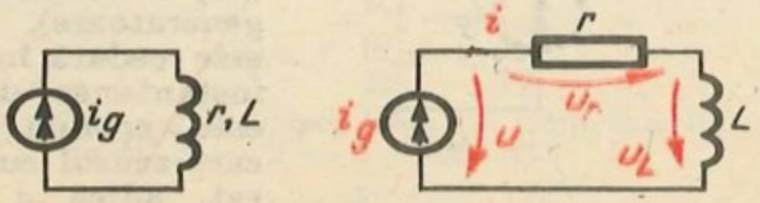


Fig. 2.5

B. PRODUCEREA TENSIUNII ELECTROMOTOARE SINUSOIDALE. MĂRIMI CU VARIAȚIE SINUSOIDALĂ ÎN TIMP

1. Principiul generatorului de curent alternativ

Circuitele de curent alternativ sinusoidal (prescurtat circuite de c.a.) au o largă răspîndire atît în electroenergetică, cît și în electrocomunicații. În electroenergetică, producerea, transmisiunea și utilizarea energiei electromagnetice se realizează aproape integral în curent alternativ. Printre principalele avantaje ale curentului alternativ amintim producerea sa simplă.

O tensiune electromotoare alternativă sinusoidală poate fi produsă prin rotirea unui cadru bobinat în cîmp magnetic uniform. Principiul de funcționare al acestui generator simplu este același cu cel al generatoarelor industriale de c.a. De aceea îl vom studia în detaliu.

Să considerăm un cadru cu N spire (fig. 2.6) antrenat într-o mișcare de rotație uniformă, cu viteza unghiulară ω, în jurul axei sale de simetrie Δ. Mișcarea de rotație se efectuează într-un cîmp magnetic uniform în spațiu și invariabil în timp, cu inducția magnetică $\vec{B}$ perpendiculară pe axa de rotație a cadrului.

Fluxul magnetic prin suprafața cadrului dreptunghiular are expresia:

$$\Phi_f = BA \cos \alpha \text{ (rel. 1.17)},$$

unde A este aria cadrului și α — unghiul dintre inducția $\vec{B}$ și versorul $\vec{n}$ normal la suprafața cadrului (fig. 2.7). Versorul $\vec{n}$ este atașat suprafeței în rotație, fiind deci un vector rotitor. Sensul versorului $\vec{n}$ este asociat după regula burghiului drept, cu un sens arbitrar ales pe conturul cadrului dreptunghiular.

Să alegem ca moment $t = 0$ momentul la care $\vec{n}$ și $\vec{B}$ au același sens, respectiv momentul cînd $\vec{n}$ „trece" prin $\vec{B}$ (fig. 2.8,*a*). Observăm că la acest moment fluxul magnetic Φ_f este maxim și egal cu BA; el scade apoi, rămînînd pozitiv pentru ca odată cu rotirea cadrului cu un sfert de cerc să treacă prin zero (fig. 2.8, *b*), după care devine negativ. Fluxul își atinge valoarea minimă — BA după rotirea cu încă un sfert de cerc (fig. 2.8, *c*). Apoi Φ_f crește, rămînînd negativ, pînă la rotirea cu al treilea sfert de cerc, cînd trece prin zero (fig. 2.8, *d*), devine pozitiv și crește pînă la atingerea valorii

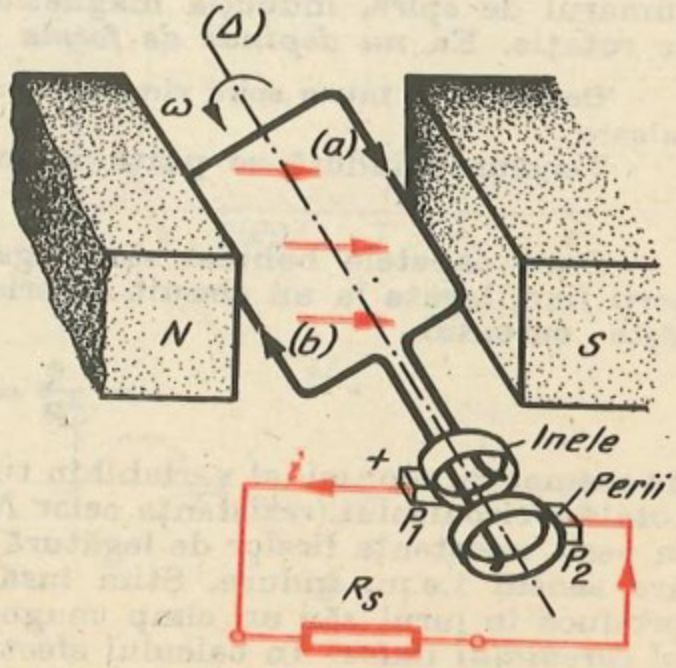


Fig. 2.6

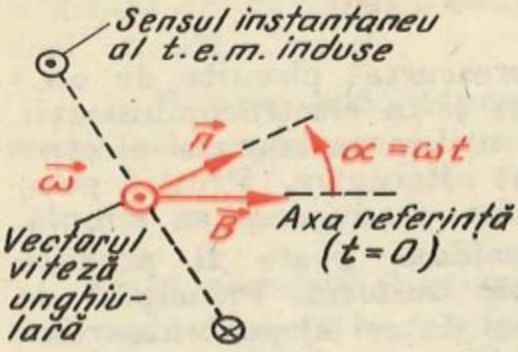


Fig. 2.7

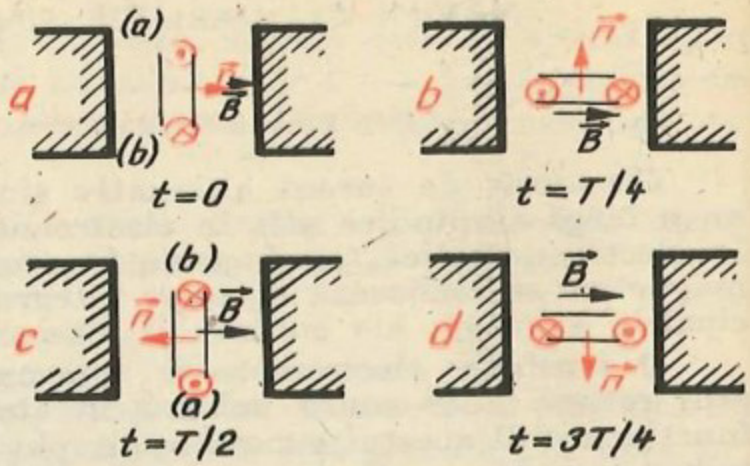


Fig. 2.8

maxime $+BA$, după o rotație completă, după care, trece din nou, prin același șir de valori.

Unghiul α format de $\vec{n}$ cu $\vec{B}$ la un moment dat t este $\alpha = \omega t$ astfel că fluxul magnetic printr-o spiră a cadrului este dat de:

$$\Phi_f = BA \cos \omega t. \tag{2.5}$$

Deoarece toate spirele cadrului sînt traversate de același flux Φ_f, fluxul magnetic total este $\Phi = N\Phi_f$. Acest flux variabil în timp (numit *flux inductor*) face ca în conturul închis format de spirele cadrului să se inducă t.e.m.

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(NBA \cos \omega t) = NBA\,\omega \sin \omega t \text{ (v. cap. 1 C. 1. — nota).}$$

Valoarea maximă a t.e.m. induse $NBA\,\omega = E_m$ este proporțională cu numărul de spire, inducția magnetică, aria unei spire și viteza unghiulară de rotație. Ea *nu depinde de forma geometrică a spirei.*

De exemplu, într-o spiră circulară cu aceeași arie A se induce o t.e.m. de aceeași valoare.

Tensiunea indusă se poate scrie deci:

$$e = E_m \sin \omega t. \tag{2.6}$$

Dacă capetele bobinei sînt legate la două inele care alunecă pe două perii fixe, legate la un circuit exterior (fig. 2.6) atunci prin circuit se stabilește curentul

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E_m}{R} \sin \omega t,$$

de asemenea sinusoidal variabil în timp. În această expresie R este rezistența totală a circuitului (rezistența celor N spire ale cadrului, rezistența de contact la perii, rezistența firelor de legătură și rezistența de sarcină). Curentul indus are sensul t.e.m. induse. Știm însă că un conductor străbătut de curent produce în jurul său un cîmp magnetic. Va exista deci și un *cîmp magnetic al curentului indus.* În calculul efectuat, acest cîmp magnetic de *reacțiune* a fost neglijat în raport cu cîmpul magnetic inductor.

Aplicaţie. *O bobină dreptunghiulară se roteşte cu 120 rot/min într-un cîmp magnetic uniform cu inducţia 0,8 T. Dacă bobina are 25 spire şi suprafaţa unei spire este 4 cm², să se calculeze:*

a) *expresia t.e.m. induse;*

b) *timpul în care spira efectuează o rotaţie completă;*

c) *curentul indus într-un rezistor de 10 Ω.*

Se vor neglija: cîmpul magnetic de reacţie al curentului indus, rezistenţa spirelor şi rezistenţa de contact la perii.

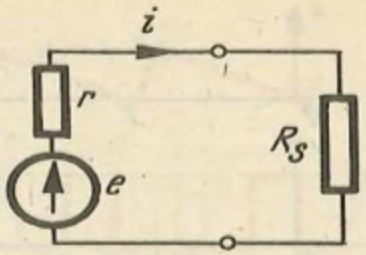


Fig. 2.9

a) Viteza unghiulară de rotaţie este:

$$\omega = 2\pi \times 120 \frac{\text{rot}}{\text{min}} \times \frac{1}{60} \frac{\text{min}}{\text{s}} = 4\pi = 12{,}56 \text{ rad/s}.$$

Valoarea maximă a t.e.m. este:

$$E_m = NBA\omega = 25 \times 0{,}8 \times 4 \cdot 10^{-4} \times 12{,}56 \cong 0{,}100 \text{ V}.$$

În consecinţă, expresia t.e.m. este:

$$e = 0{,}1 \sin 12{,}56\, t.$$

b) Dacă se efectuează 120 rotaţii într-un minut, atunci pe secundă se efectuează două rotaţii. Timpul în care se efectuează o rotaţie este deci $T = \frac{1}{2} = 0{,}5$ s.

c) Deoarece generatorul considerat este echivalent unei surse avînd t.e.m. e şi rezistenţa internă r egală cu rezistenţa spirelor şi a contactului la perii şi la care este conectat rezistorul de sarcină R_s (fig. 2.9), curentul prin circuit este:

$$i = \frac{e}{r + R_s} \cong \frac{e}{R_s} = \frac{0{,}1}{10} \sin 12{,}56\, t \text{ (A)} = 10 \sin 12{,}56\, t \text{ (mA)}$$

dacă se neglijează rezistenţa r.

2. Mărimi periodice

Fluxul magnetic $\Phi_f = BA \cos \omega t$ şi t.e.m. $e = E_m \sin \omega t$ sînt mărimi variabile în timp. Dependenţa de timp a acestor mărimi este indicată în figura 2.10.

Mărimile sinusoidale, dar nu numai acestea, sînt periodice. Curentul în dinţi de ferăstrău (fig. 2.11, *a*) prin bobinele de deflexie ale tuburilor cinescop, tensiunile la bornele unor generatoare electronice de semnale utilizate în testarea aparaturii electronice (fig. 2.11, *b*, *c*, *d*) sînt exemple de mărimi periodice.

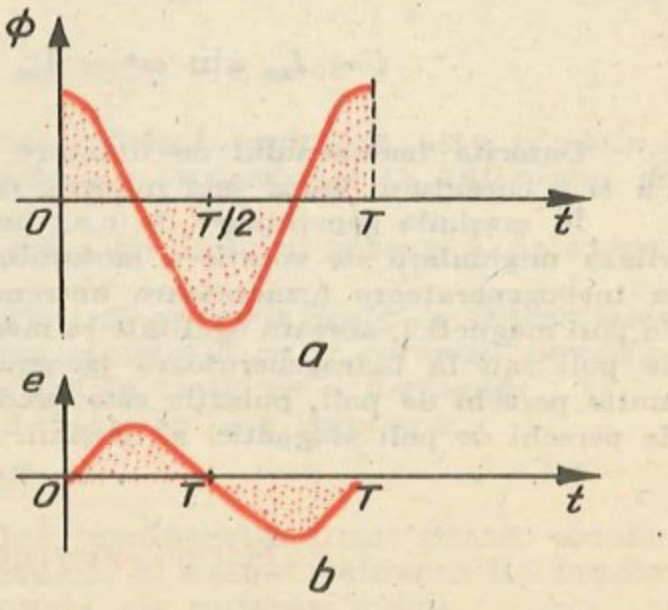


Fig. 2.10

O mărime periodică este *o mărime variabilă ale cărei valori se reproduc în aceeaşi succesiune, la intervale de timp egale.*

Perioada T este *intervalul minim de timp după care se reproduc în aceeaşi ordine valorile mărimii periodice.*

Valoarea instantanee a unei mărimi periodice este o funcţie periodică de timp care va satisface condiţia

$$i(t) = i(t + T),$$

oricare ar fi momentul t.

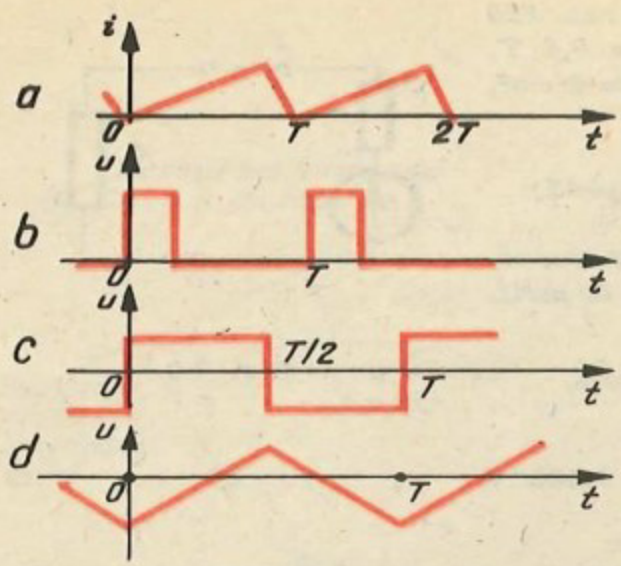


Fig. 2.11

Numărul de perioade cuprins într-o secundă se numește **frecvență.** Frecvența se notează cu f și are unitatea de măsură *herț*, cu prescurtarea Hz. Relația de definiție este:

$$f = \frac{1}{T} . \qquad (2.7)$$

Rețelele electrice de transmisie și distribuție a energiei electrice în curent alternativ au frecvența standardizată de 50 Hz (în S.U.A., 60 Hz). Această frecvență este denumită *frecvență industrială.*

Produsul frecvenței prin 2π se numește **frecvență unghiulară** sau **pulsație.** Simbolul pulsației este ω. Unitatea de măsură este radian/secundă (rad/s).

Pulsația are relația de definiție

$$\omega = 2\pi f \qquad (2.8)$$

Între aceste mărimi există și relațiile:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} , \quad \omega = \frac{2\pi}{T} , \quad \omega T = 2\pi .$$

Cu aceste relații, observăm că putem pune expresia curentului și sub una dintre formele:

$$i = I_m \sin \omega t = I_m \sin 2\pi ft = I_m \sin 2\pi \frac{t}{T} .$$

Datorită fenomenului de inducere a t.e.m. prin rotirea cadrului bobinat, pulsația ω a curentului indus este numeric egală cu viteza unghiulară de rotație a bobinei.

În mașinile generatoare de c.a., pulsația t.e.m. induse este în general diferită de viteza unghiulară de rotație a motorului primar de antrenare a generatorului. Numai la turbogeneratoare (generatoare antrenate de turbine cu abur) cu o singură pereche de poli magnetici, această egalitate se menține. La turbogeneratoare cu mai multe perechi de poli sau la hidrogeneratoare (generatoare antrenate de turbine hidraulice) cu mai multe perechi de poli, pulsația este produsul vitezei de rotație a turbinei prin numărul de perechi de poli magnetici ai mașinii.

3. Mărimi alternative; mărimi sinusoidale

Valoarea medie a unei mărimi periodice este *media aritmetică a valorilor instantanee în intervalul de timp cu durata T egală cu perioada mărimii.* Notăm medierea în timp cu simbolul mărimii cu tildă: $\tilde{i}$.

O mărime alternativă este *o mărime periodică a cărei valoare medie este nulă.*

O mărime sinusoidală este *o mărime alternativă cu variația în timp de formă sinusoidală.*

Valoarea medie a unei mărimi sinusoidale este nulă. Referindu-ne la curentul sinusoidal $i = I_m \sin \omega t$, constatăm că sensul curentului în circuitul indicat în figura 2.6 se schimbă la fiecare semiperioadă. În semiperioada $0 < t < T/2$ intensitatea curentului este pozitivă și curentul circulă de la peria P_1 la peria P_2. În semiperioada următoare ($T/2 < t < T$) intensitatea curentului este negativă și curentul își schimbă sensul, circulînd prin R_s de la P_2 la P_1. Pentru a calcula valoarea medie, să luăm valorile curentului la intervale de timp egale în cuprinsul unei perioade. În figura 2.12 perioada a fost divizată în N intervale egale și au fost indicate valorile instantanee la aceste momente. Valorile instantanee ale curentului satisfac relația de simetrie $i(t + T/2) = -i(t)$, astfel că în media aritmetică apar valori instantanee egale două cîte două dar de semne contrare. Rezultă că media aritmetică a acestor valori este nulă. Circuitul este deci străbătut de un curent alternativ.

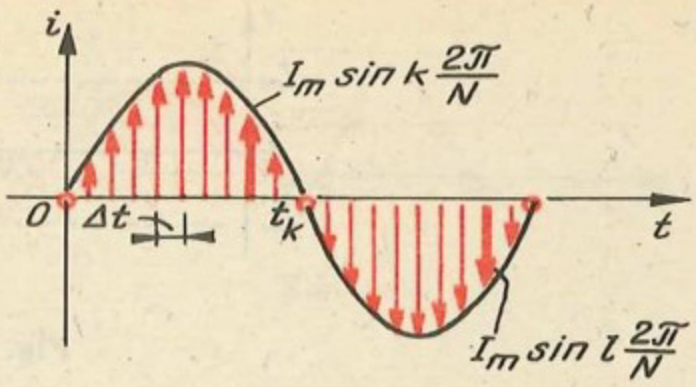


Fig. 2.12

○ **Observație.** Tensiunile dreptunghiulare și triunghiulare indicate în figurile 2.11, *c* și *d* au valorile medii nule și sînt deci de asemenea mărimi alternative. Curentul în dinți de ferăstrău (fig. 2.11, *a*) și succesiunea de impulsuri dreptunghiulare (fig. 2.11, *b*) au o valoare medie nenulă și deci nu sînt mărimi alternative.

Rețelele de curent alternativ sinusoidal sînt uzual numite *rețele de curent alternativ*, deși mărimile sinusoidale nu sînt singurele mărimi alternative.

4. Valoarea efectivă a unei mărimi periodice

Valoarea efectivă (sau **eficace**) **a unei mărimi periodice** este *rădăcina pătrată a mediei aritmetice a pătratelor valorilor instantanee în intervalul de timp al unei perioade.*

Notăm valoarea efectivă cu litera mare a simbolului mărimii (de exemplu, I).

Valoarea efectivă a unui curent periodic *este numeric egală cu intensitatea unui curent continuu care, străbătînd aceeași rezistență ca și curentul periodic, face să se dezvolte aceeași cantitate de căldură în timp de o perioadă.*

Puterea instantanee disipată într-un rezistor are expresia

$$p_R = Ri^2.$$

Din cauza inerției termice a rezistorului, temperatura nu poate urmări variațiile instantanee ale pătratului curentului, ci numai valoarea lui medie. Căldura dezvoltată este atunci proporțională cu puterea medie

$$P_R = \widetilde{p}_R = R\widetilde{i^2} = RI^2,$$

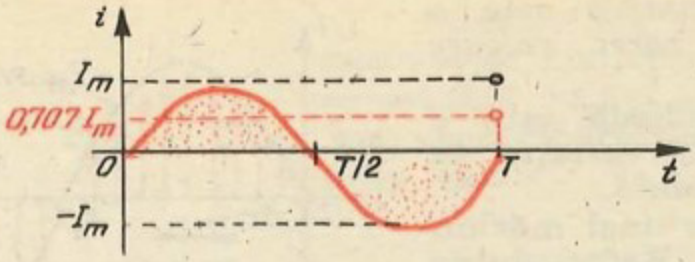


Fig. 2.13

numită *putere activă*, egală cu produsul între rezistența R și pătratul valorii efective a curentului. Aceeași putere s-ar disipa însă și atunci cînd rezistorul ar fi parcurs de un curent continuu numeric egal cu valoarea efectivă a curentului periodic. Puterile disipate fiind aceleași, rezultă că și căldura dezvoltată în cele două situații este aceeași.

○ **Observație.** Din cauza inerției echipajului mobil, ampermetrele și voltmetrele cu ac indicator nu pot urmări variațiile instantanee rapide ale mărimilor periodice măsurate. De aceea, ele indică *valori medii* atunci cînd cuplul activ este proporțional cu valoarea instantanee a mărimii și *valori efective* atunci cînd cuplul activ este proporțional cu pătratul mărimii măsurate. Instrumentele magnetoelectrice indică valoarea medie și pot fi folosite numai în c.c. (eventual în c.a., cu redresor). Instrumentele electromagnetice și instrumentele electrodinamice indică valoarea efectivă și pot fi utilizate în curent alternativ.

5. Caracteristicile mărimilor sinusoidale

Să considerăm expresia generală a unei mărimi sinusoidale, de exemplu curentul sinusoidal

$$i = I_m \sin (\omega t + \gamma),$$

a cărei dependență de timp se indică în figura 2.13.

Se numește **amplitudine** *valoarea maximă* I_m *a mărimii sinusoidale.*

Se numește **fază** *argumentul sinusului*, adică unghiul $\omega t + \gamma$. Faza se va exprima de regulă în radiani.

Se numește **fază inițială** *valoarea* γ *a fazei la momentul inițial* ($t = 0$). Notăm de obicei cu γ faza inițială a unui curent, cu β faza inițială a unei tensiuni, cu α faza inițială a unei t.e.m. etc.

Convenim să exprimăm faza inițială în intervalul $[-\pi, \pi]$. Deci.

$$-\pi \leqslant \gamma \leqslant \pi.$$

În electrotehnică operăm cu **valori efective.** Să calculăm valoarea efectivă a curentului sinusoidal $i = I_m \sin \omega t$. Pătratul valorilor instantanee se obține din relația:

$$i^2 = I_m^2 \sin^2 \omega t = I_m^2 \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t).$$

În figura 2.14 se indică variația în timp a pătratului curentului. Această nouă funcție poate fi privită ca suprapunerea dintre funcția constantă de valoare I_m^2 și funcția cosinusoidală de frecvență dublă în raport cu cea a curentului. Valoarea medie a funcției constante este chiar valoarea acesteia. Valoarea medie a componentei cosinusoidale este nulă. În consecință valoarea medie a funcției i^2 este $I_m^2/2$. Rădăcina pătrată a acestei medii este valoarea efectivă

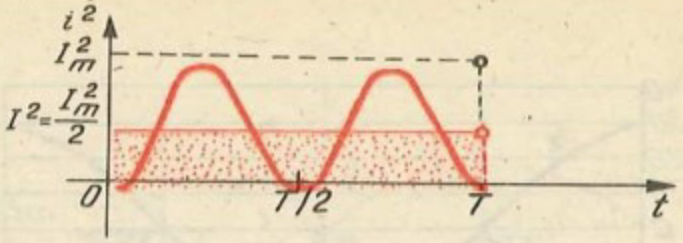


Fig. 2.14

$$I = \sqrt{\overline{i^2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, I_m. \qquad (2.9)$$

Vom scrie de aceea mărimile sinusoidale sub forma generală

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma),$$

unde $I\sqrt{2} = I_m$ este amplitudinea curentului (A). Reamintim că $T = 2\pi/\omega$ este perioada (s), $f = 1/T$ este frecvența (Hz).

Aplicația 1. *Intensitatea curentului pentru un circuit are expresia instantanee* $i = 2{,}5\sqrt{2}\sin(\omega t - \pi/6)$ *(A). Să se specifice:*

a) *valoarea efectivă și faza inițială;*

b) *valorile instantanee la* $\omega t = 0$ *și* $\omega t = \pi/6$;

c) *momentul la care curentul are valoarea maximă, știind că frecvența este 50 Hz.*

a) Comparînd expresia dată cu expresia generală, obținem:

$$I = 2{,}5 \text{ A}, \quad \gamma = -\pi/6.$$

b) $i = 2{,}5\sqrt{2}\sin(-\pi/6) = -2{,}5\sqrt{2} \times \frac{1}{2}$ pentru $\omega t = 0$; $i = 0$ pentru $\omega t = \frac{\pi}{6}$.

c) Curentul are valoarea maximă atunci cînd faza sa are valoarea $+\pi/2$. Deci

$$\omega t_0 - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_0 = 2\pi/3\omega.$$

Deoarece $\omega = 2\pi f$, rezultă $2\pi\frac{t_0}{T} = \frac{2\pi}{3}$ și $t_0 = T/3$.

Dar $T = 1/f = 1/50 = 0{,}02$ s $= 20$ ms. Momentul este la $t_0 = 20/3 = 6{,}77$ ms.

Aplicația 2. *Intensitatea curentului printr-un circuit are expresia:*

$$i = 0{,}2\sqrt{2}\sin(2\pi \cdot 50\, t) \text{ (A)}.$$

Să se calculeze:

a) *amplitudinea;*

b) *perioada;*

c) *faza inițială.*

a) Deoarece valoarea efectivă a curentului este $I = 0{,}2$ A, amplitudinea curentului este $I_m = 0{,}2\sqrt{2} = 0{,}283$ A.

b) Frecvența fiind $f = 50$ Hz, rezultă perioada $T = 1/f = 1/50 = 0{,}02$ s $= 20$ ms.

c) Faza inițială este nulă.

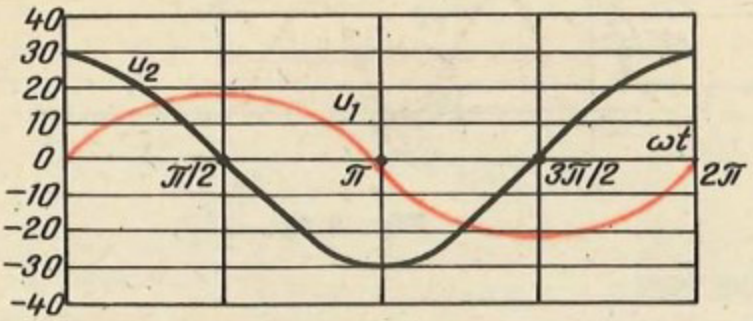


Fig. 2.15

Aplicaţia 3. *O tensiune sinusoidală vizualizată pe ecranul unui osciloscop are amplitudinea 30 mV şi perioada 80 μs. Să se calculeze:*

a) *valoarea efectivă a semnalului;*

b) *frecvenţa şi pulsaţia:*

a) $U = 0{,}707\,U_m = 0{,}707 \times 30 \cdot 10^{-3} = 21{,}21$ mV.

b) $f = 1/T = 1/(80 \cdot 10^{-6}) = 1{,}25 \cdot 10^4$ Hz $= 12{,}5$ kHz;

$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 1{,}25 \cdot 10^4 = 7{,}85 \cdot 10^4$ rad/s.

Aplicaţia 4. *În figura 2.15 sînt reprezentate două tensiuni sinusoidale.*

a) *Să se specifice expresiile instantanee.*

b) *Să se calculeze valorile efective şi diferenţa fazelor iniţiale ale celor două mărimi.*

a) Tensiunile u_1 şi u_2 au expresiile: $u_1 = 20 \sin \omega t$; $u_2 = 30 \cos \omega t$. A doua tensiune se mai scrie: $u_2 = 30 \sin (\omega t + \pi/2)$, pentru a se respecta scrierea sub forma normală în sinus.

b) Valorile efective sînt: $U_1 = 0{,}707 \times 20 = 14{,}14$ V; $U_2 = 0{,}707 \times 30 = 21{,}21$ V. Fazele iniţiale sînt: $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \frac{\pi}{2}$ rad. Diferenţa fazelor iniţiale este $\gamma_1 - \gamma_2 = -\pi/2$ rad.

6. Reprezentarea vectorială a mărimilor sinusoidale

În regim sinusoidal toţi curenţii şi toate tensiunile dintr-un circuit electric sînt mărimi variabile sinusoidal în timp. Frecvenţa tuturor acestor mărimi sinusoidale este aceeaşi şi este determinată de sursele din circuit. Dintre cele trei mărimi care determină complet o mărime sinusoidală: *frecvenţa*, *valoarea efectivă* şi *faza iniţială*, una — frecvenţa — este cunoscută. Este necesară deci numai determinarea celorlalte două. Aceasta înseamnă că, de exemplu, curentul sinusoidal $i = I\sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma)$ este complet precizat dacă se dau valoarea efectivă I şi faza iniţială γ.

Există mărimi matematice complet caracterizate prin perechi de numere reale: vectorii liberi din plan, numerele complexe etc. Între mărimile sinusoidale şi aceste mărimi matematice se poate stabili o corespondenţă biunivocă. Se obţine astfel o reprezentare simbolică a mărimilor sinusoidale. Se spune că avem *o reprezentare vectorială*, respectiv *o reprezentare în planul complex*. Studiul circuitelor electrice în regim sinusoidal cu ajutorul acestor reprezentări este considerabil simplificat.

• Vom studia pentru început **reprezentarea vectorială.**

Reamintim că un vector liber în plan se caracterizează prin două mărimi scalare: modulul şi unghiul format cu o axă de referinţă. Punctul de aplicaţie al unui vector liber este arbitrar.

În reprezentarea vectorială, unei mărimi sinusoidale $i = I\sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma)$ *i se asociază un vector liber în plan* $\vec{I} : I\underline{/\gamma}$, *care are modulul egal cu valoarea efectivă şi care face cu o axă de referinţă un unghi egal cu faza iniţială.*

○ **Observaţie.** Reprezentarea este biunivocă: unui vector liber din plan îi corespunde o mărime sinusoidală.

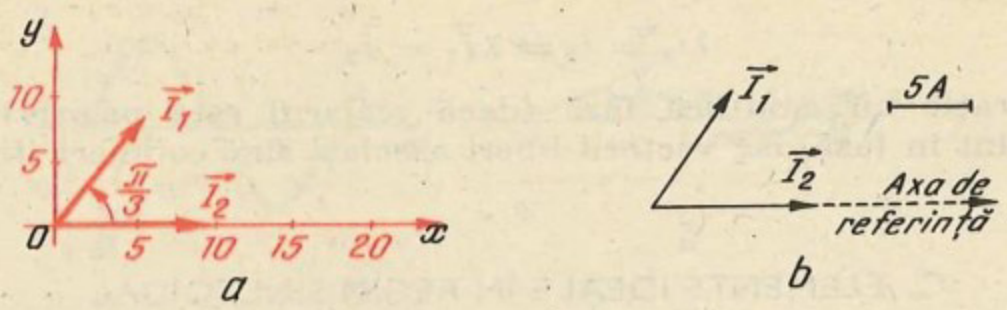


Fig. 2.16

Scriem această corespondență biunivocă sub forma:

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) \rightleftarrows \vec{I} : I/\underline{\gamma}. \qquad (2.10)$$

De exemplu, să considerăm curentul $i_1 = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/3)$ *A*. În planul *xoy* să alegem axa *ox* ca axă de referință și originea ca punct de aplicație (fig. 2.16, *a*). Vectorul liber asociat este $\vec{I}_1 : 10/\underline{\pi/3}$ (el are modulul 10 *A* și face unghiul $\pi/3$ cu axa *ox*).

De obicei se utilizează același punct de aplicație pentru toți vectorii liberi asociați curenților și tensiunilor dintr-un circuit dat. De aceea, de exemplu, vectorul $\vec{I}_2 : 10/\underline{0}$, asociat curentului $i_2 = 10\sqrt{2}\sin\omega t$, este reprezentat cu punctul de aplicație în originea axelor. În aplicații este suficient să se specifice axa de referință aleasă și unitatea de măsură a reprezentărilor (fig. 2.16, *b*).

• Să exemplificăm **proprietățile reprezentării vectoriale** prin corespondența a două operații cu mărimi sinusoidale: adunarea și înmulțirea cu un scalar.

Adunarea mărimilor sinusoidale corespunde în mod biunivoc cu adunarea vectorilor liberi asociați:

$$i_1 + i_2 = i \rightleftarrows \vec{I}_1 + \vec{I}_2 = \vec{I}.$$

Vectorul $\vec{I}$ rezultă din compunerea vectorilor $\vec{I}_1$ și $\vec{I}_2$ după regula paralelogramului (sau triunghiului) (fig. 2.17, *a*).

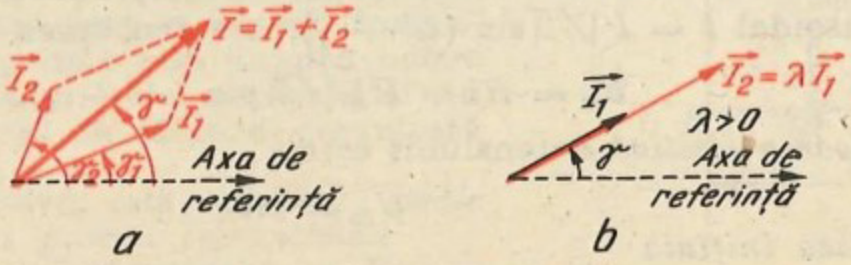


Fig. 2.17

Înmulțirea cu un factor constant $\lambda > 0$ a unei mărimi sinusoidale corespunde biunivoc cu înmulțirea vectorului liber asociat cu acel scalar:

$$\lambda i_1 = i_2 \rightleftarrows \lambda \vec{I}_1 = \vec{I}_2.$$

Această operație nu modifică faza (dacă scalarul este pozitiv): mărimile sinusoidale sînt în fază, iar vectorii liberi asociați sînt coliniari (fig. 2.17, *b*).

C. ELEMENTE IDEALE ÎN REGIM SINUSOIDAL

Elementele de circuit ideale: rezistorul, bobina și condensatorul au fost studiate în regim variabil în timp. Am constatat că fiecare dintre aceste trei elemente se caracterizează printr-o ecuație tensiune-curent specifică:

$$u_R = Ri; \quad u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}; \quad i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}.$$

În regim permanent sinusoidal, dacă se aplică la bornele elementului tensiunea sinusoidală

$$u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta),$$

intensitatea curentului prin element este de asemenea sinusoidală și de aceeași pulsație:

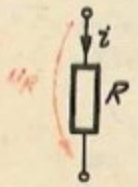
$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma).$$

Celor trei ecuații de circuit de regim variabil le corespund în regim sinusoidal ecuații între valori efective și între fazele inițiale. Vom determina aceste relații pe rînd, pentru fiecare element. De asemenea, vom analiza schimbul de energie la bornele elementelor în regim sinusoidal.

1. Rezistorul ideal. Puterea activă

• Un rezistor ideal (fig. 2.18), străbătut de curentul sinusoidal $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma)$, are **tensiunea la borne:**

$$u_R = Ri = RI\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma).$$



Valoarea efectivă a tensiunii este

$$\boxed{U_R = RI} \tag{2.11}$$

și *faza inițială*

$$\boxed{\beta = \gamma}.$$

Curentul este deci în fază cu tensiunea aplicată (fig. 2.19, *a*). *Valorile efective satisfac „legea" lui Ohm* (2.11).

Fig. 2.18

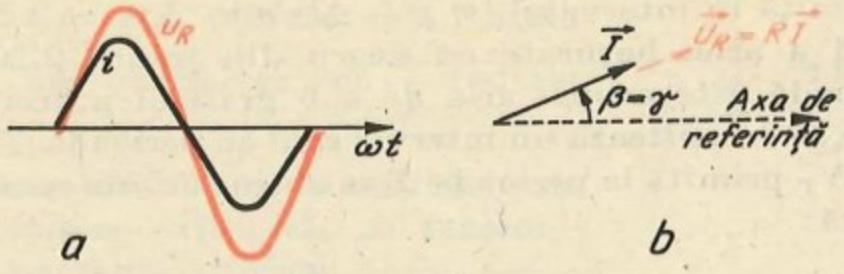


Fig. 2.19

• **Vectorii liberi asociați sînt:**

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) \rightleftarrows \vec{I}: I\underline{/\gamma};$$

$$u_R = RI\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) \rightleftarrows \vec{U}_R: RI\underline{/\gamma}.$$

Ei satisfac ecuația

$$\vec{U}_R = R\vec{I}$$

și se reprezintă prin *vectori coliniari* (fig. 2.19, *b*).

• **Puterea instantanee** primită pe la borne de rezistorul ideal are expresia

$$p = u_R i = Ri^2$$

și este întotdeauna pozitivă (fig. 2.20). Să calculăm valoarea medie a puterii instantanee în intervalul unei perioade. Obținem:

$$\boxed{P = \widetilde{p} = R\widetilde{i^2} = RI^2},$$

deoarece $\widetilde{i^2} = I^2$ conform calculului efectuat la determinarea valorii efective a unui curent sinusoidal. Știm că din cauza inerției termice, căldura dezvoltată în rezistoare este proporțională cu această valoare medie în timp a puterii instantanee. Această putere este numită *putere activă*. Definiția ei este generală și nu este legată numai de căldura dezvoltată în rezistoare.

Puterea activă *este valoarea medie pe o perioadă a puterii instantanee.*

Puterea activă se notează cu P și se măsoară în *watt*. Multiplii des utilizați sînt kilowatt (1 kW = 10^3 W), megawatt (1 MW = 10^6 W).

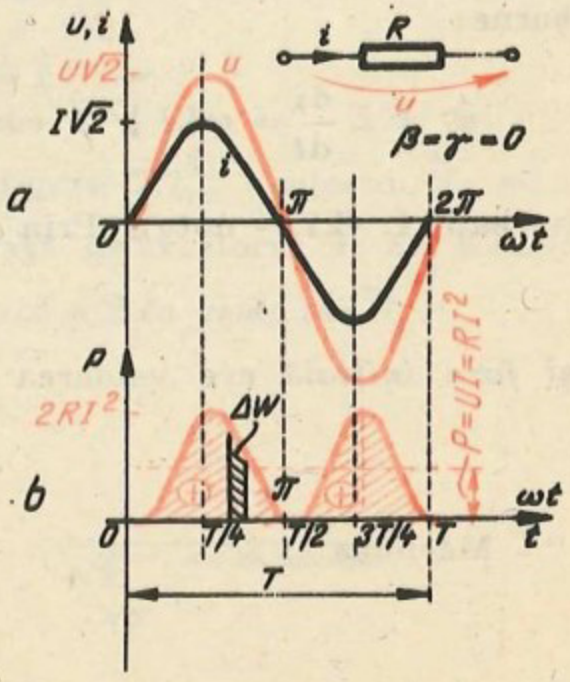


Fig. 2.20

Să calculăm **energia electrică primită în intervalul unei perioade.** Deoarece puterea instantanee este debitul instantaneu al energiei electrice primite, energia primită în intervalul $(t;\ t + \Delta t)$ este $\Delta W = p\Delta t$ şi are semnificaţia geometrică a ariei haşurate cu negru din figura 2.20, *b*. Energia primită într-o perioadă este atunci aria de sub graficul puterii instantanee între două momente ce delimitează un interval egal cu perioada T (fig. 2.20, *b*). Împărţind energia W_T primită la perioada T se obţine *debitul mediu al energiei*, deci puterea activă:

$$P = \frac{W_T}{T}.$$

○ **Observaţie.** În aplicaţii interesează energia absorbită într-un interval de timp foarte mare faţă de perioada T. Dacă intervalul este egal cu un număr întreg de perioade, atunci debitul mediu este de asemenea puterea activă deoarece într-un număr n întreg de perioade energia primită este nW_T. Dacă intervalul este arbitrar, dar foarte mare în raport cu T, energia electrică primită este, cu bună aproximaţie, egală cu puterea activă înmulţită cu acel interval, cu abateri cu atît mai mici cu cît intervalul este mai mare.

2. Bobina ideală. Reactanţa inductivă. Puterea reactivă inductivă

• Să considerăm o bobină ideală. În regim sinusoidal bobina ideală străbătută de curentul sinusoidal $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma)$ are **tensiunea la borne:**

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \omega LI\sqrt{2}\cos(\omega t + \gamma) = \omega LI\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right)$$

(v. cap. 1. C.1 — nota). Prin urmare, *valoarea efectivă* a tensiunii u_L este

$$U_L = \omega LI$$

şi *faza iniţială* are valoarea

$$\beta = \gamma + \frac{\pi}{2}.$$

Mărimea

$$\omega L = X_L \tag{2.12}$$

se numeşte *reactanţă inductivă*. Simbolul reactanţei este X. Reactanţa se măsoară în *ohmi*, ca şi rezistenţa.

○ **Concluzii.** Pentru o bobină ideală rezultă că:

• curentul este defazat în urma tensiunii cu un unghi egal cu $\frac{\pi}{2}$ radiani (fig. 2.21);

• valoarea efectivă a curentului este egală cu valoarea efectivă a tensiunii împărţită la reactanţa bobinei.

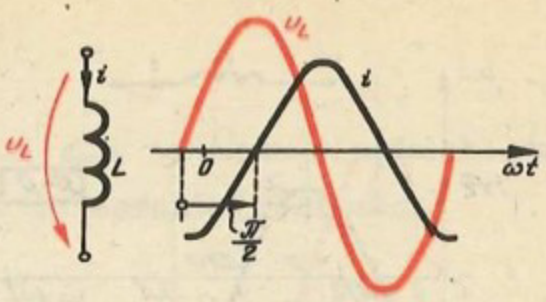


Fig. 2.21

○ **Observaţii.** 1) *În curent continuu* căderea de tensiune la bornele unei bobine ideale este nulă, deoarece derivata unei mărimi invariabile în timp este nulă (viteza ei de variaţie este nulă). Se spune că *bobina reprezintă un scurt-circuit.*

2) *În curent alternativ* la o tensiune la borne dată, curentul este limitat de reactanţa bobinei, care este proporţională cu frecvenţa. De aceea *o bobină blochează trecerea curentului la frecvenţe înalte şi reprezintă un scurtcircuit la frecvenţe suficient de joase.*

3) *Reactanţa bobinei nu are sens decît în curent alternativ* (în regimul în care ea este definită).

• **Vectorii asociaţi tensiunii şi curentului**

$$u_L = U\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right) \rightleftarrows \vec{U}_L : U\ \underline{/\pi/2+\gamma};$$

$$i = I\sqrt{2}\sin\ (\omega t + \gamma) \rightleftarrows \vec{I} : I\underline{/\gamma},$$

sînt reprezentaţi în diagrama vectorială din figura 2.22. Vectorul $\vec{U}_L$ este rotit cu unghiul $\pi/2$ în sens trigonometric faţă de vectorul $\vec{I}$. *La bobina ideală* $\vec{U}_L \perp \vec{I}$ *şi curentul* $\vec{I}$ *este defazat cu unghiul* $\pi/2$ *în urma lui* $\vec{U}_L$.

• **Puterea instantanee** schimbată de bobina ideală pe la borne are expresia:

$$p = u_L i = 2\omega LI^2 2\sin(\omega t+\gamma)\cos(\omega t+$$

$$+\gamma) = \omega LI^2\sin\ 2\ (\omega t+\gamma)$$

şi este sinusoidal variabilă în timp, de frecvenţă dublă (fig. 2.23, *a*).

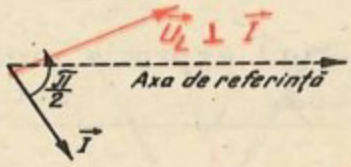


Fig. 2.22

Puterea activă. Pe durata unei perioade, într-o semiperioadă puterea instantanee este primită de bobină, iar în semiperioada imediat următoare

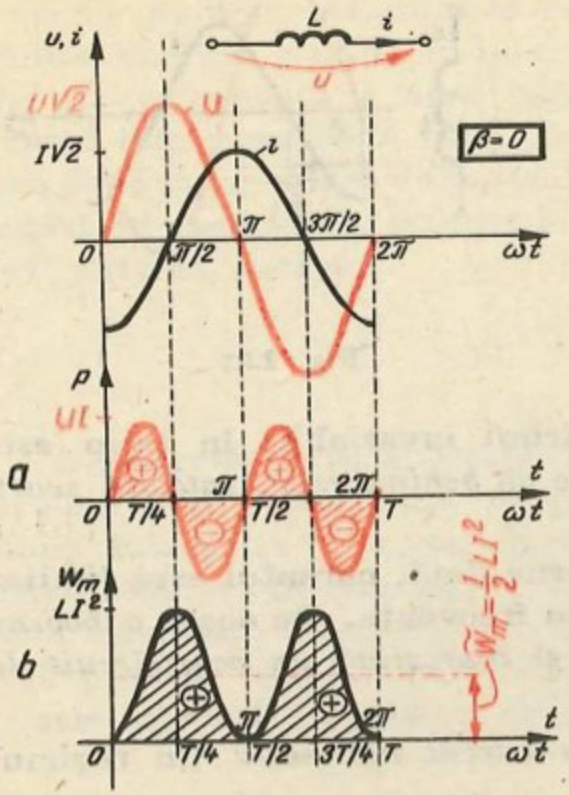


Fig. 2.23

puterea instantanee este cedată de bobină spre exterior (de exemplu, sursei la care este conectată). În medie, pe o perioadă energia primită pe la borne este nulă. *Puterea activă este* deci de asemenea *nulă*. În bobina ideală nu au loc transformări ireversibile ale energiei în căldură.

Bobina ideală nu este un consumator de putere activă; ea schimbă puterea instantanee cu exteriorul. Putem caracteriza acest schimb energetic prin amplitudinea puterii instantanee (care este oscilantă). Numim această mărime **putere reactivă inductivă.** Expresia ei este:

$$Q_L = \omega L I^2 = X_L I^2 \qquad (2.13)$$

Puterea reactivă are simbolul Q. Ea se măsoară în *var* (prescurtare de la volt-amper-reactiv).

• **Variația în timp a energiei magnetice** $W_m(t) = \frac{1}{2} Li^2$ este reprezentată în figura 2.23, *b*. Atunci *cînd puterea instantanee este pozitivă*, de exemplu în intervalul $(0; T/4)$, energia magnetică acumulată în bobină crește de la zero la valoarea maximă LI^2, avînd semnificația geometrică a ariei hașurate de sub graficul puterii instantanee. Atunci *cînd puterea instantanee este negativă*, în intervalul $(T/4; T/2)$, energia magnetică acumulată descreşte de la valoarea maximă la zero. În acest interval bobina ideală cedează integral energia primită. Bobina ideală schimbă energia pe la borne fără a o consuma; ceea ce primeşte într-un interval cu durata $T/4$ se cedează în intervalul imediat următor. Valoarea medie în timp, pe o perioadă, a energiei magnetice este însă:

$$\tilde{W}_m = \frac{1}{2} L\tilde{i^2} = \frac{1}{2} LI^2.$$

Comparînd expresia puterii reactive cu cea a energiei magnetice medii, constatăm că

$$Q_L = 2\ \omega \tilde{W}_m,$$

ceea ce arată că *puterea reactivă inductivă este proporțională cu valoarea medie pe o perioadă, a energiei magnetice acumulate în bobină.*

3 Condensatorul ideal. Reactanţa capacitivă. Puterea reactivă capacitivă

• **În regim sinusoidal condensatorul ideal sub tensiunea aplicată la borne** $u_C = U_C\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta)$ **este străbătut de curentul sinusoidal**

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} C\omega U\sqrt{2}\cos(\omega t + \beta) = C\omega U\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right)$$

(v. cap. 1. C.1 — nota).

Prin urmare, *valoarea efectivă* a curentului este

$$I = \omega C U \tag{2.14}$$

şi *faza iniţială* are valoarea

$$\gamma = \beta + \frac{\pi}{2}.$$

Mărimea

$$\frac{-1}{\omega C} = X_C \tag{2.15}$$

este *reactanţa, capacitivă.*

○ **Concluzii.** Pentru un condensator ideal rezultă deci că:

• curentul este defazat înaintea tensiunii cu $\frac{\pi}{2}$ radiani (fig. 2.24);

• valoarea efectivă a curentului este egală cu valoarea efectivă a tensiunii împărţită la modulul reactanţei capacitive.

○ **Observaţii.** 1) *În curent continuu* curentul prin condensatorul ideal este nul. *Condensatorul reprezintă deci o întrerupere de circuit.*

2) *În curent alternativ*, la o tensiune aplicată la borne dată, curentul prin condensator este determinat de reactanţa sa. Reactanţa unui condensator ideal este invers proporţională cu frecvenţa. De aceea *condensatorul ideal blochează trecerea curentului la frecvenţe joase şi reprezintă un scurt-circuit la frecvenţe înalte.*

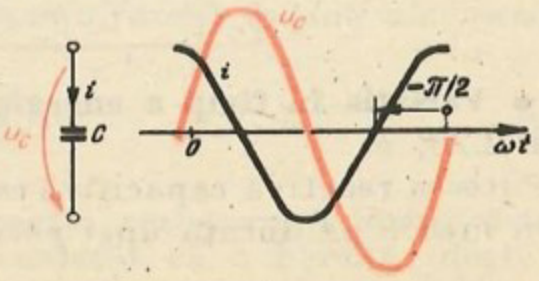


Fig. 2.24

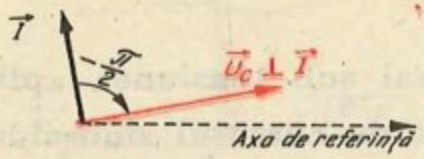


Fig. 2.25

• **Vectorii asociaţi tensiunii şi curentului,**

$$u_C = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta) \rightleftharpoons \vec{U}_C : U/\underline{\beta};$$

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta + \pi/2) \rightleftharpoons$$

$$\rightleftharpoons \vec{I} : I/\underline{\beta + \pi/2}$$

sînt reprezentaţi în diagrama vectorială din figura 2.25. Vectorul curent $\vec{I}$ este rotit cu unghiul $\pi/2$ în sens trigonometric faţă de vectorul tensiune $\vec{U}_C$ aplicată la borne. *La un condensator ideal* $\vec{U}_C \perp \vec{I}$ *şi curentul* $\vec{I}$ *este defazat cu unghiul* $\pi/2$ *radiani înaintea lui* $\vec{U}_C$.

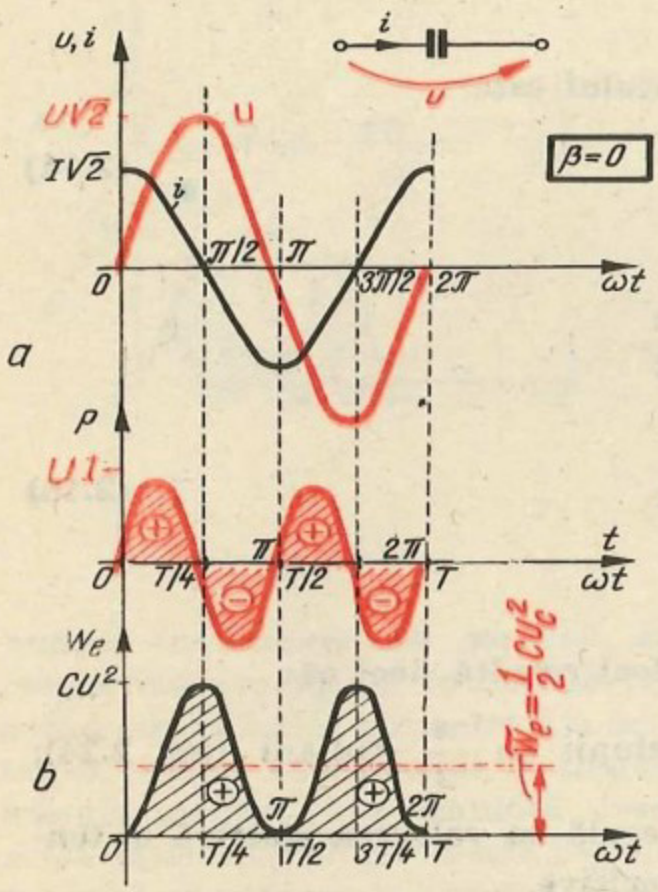


Fig. 2.26

• **Puterea instantanee** schimbată de condensatorul ideal pe la borne are expresia

$$p = u_C i = \omega C U^2 2\sin(\omega t + \beta)\cos(\omega t + \beta) = \omega C U^2 \sin 2(\omega t + \beta)$$

şi oscilează cu frecvenţa unghiulară 2ω în jurul valorii nule (fig. 2.26, *a*), ca şi la o bobină ideală.

○ **În concluzie,** pentru un condensator ideal:

• puterea activă este nulă;

• puterea reactivă capacitivă, definită, pînă la semn, ca amplitudine a puterii instantanee oscilante, este

$$Q_C = U^2/X_C = X_C I^2 = -\frac{1}{\omega C} I^2. \qquad (2.16)$$

• **Variaţia în timp a energiei electrice instantanee** este reprezentată în figura 2.26, *b*.

Puterea reactivă capacitivă este proporţională cu energia electrică acumulată în medie pe durata unei perioade în cîmpul electric al condensatorului:

$$Q_C = -2\omega \tilde{W}_e,$$

unde

$$\widetilde{W}_e = \frac{1}{2} C\widetilde{u}_C^2 = \frac{1}{2} CU^2.$$

D. COMPORTAREA UNOR CIRCUITE SIMPLE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

1. Impedanţa, admitanţa şi defazajul

Să considerăm un circuit neramificat, cu două borne de acces, alcătuit din elemente de circuit ideale pasive. Un astfel de circuit dipolar poate fi de exemplu un rezistor ideal, o bobină ideală, un condensator ideal, o conexiune serie a acestora etc.

În regim permanent sinusoidal, dacă se aplică la borne tensiunea sinusoidală

$$u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta),$$

intensitatea curentului prin circuit este de asemenea sinusoidală şi de aceeaşi frecvenţă

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma).$$

• Se numeşte **impedanţă a circuitului** *raportul dintre valoarea efectivă a tensiunii şi valoarea efectivă a curentului:*

$$\boxed{Z = \frac{U}{I}} > 0. \qquad (2.17)$$

Impedanţa se măsoară în *ohmi* (Ω), ca şi rezistenţa.

• Se numeşte **admitanţă a circuitului** *raportul dintre valoarea efectivă a curentului şi valoarea efectivă a tensiunii:*

$$\boxed{Y = \frac{I}{U}} > 0. \qquad (2.18)$$

Admitanţa se măsoară în *siemenşi* (S), ca şi conductanţa.

Impedanţa şi admitanţa sînt mărimi pozitive.

• Se numeşte **defazaj** al curentului *diferenţa fazelor iniţiale ale tensiunii şi curentului:*

$$\boxed{\varphi = \beta - \gamma} \gtrless 0. \qquad (2.19)$$

Faza iniţială a curentului este, cu excepţia rezistorului ideal, diferită de cea a tensiunii aplicate la borne. Am constatat că o bobină ideală sau un condensator ideal defazează curentul în urmă, respectiv înaintea tensiunii, cu unghiul $\pi/2$ rad. În circuite simple, pasive, alcătuite din rezis-

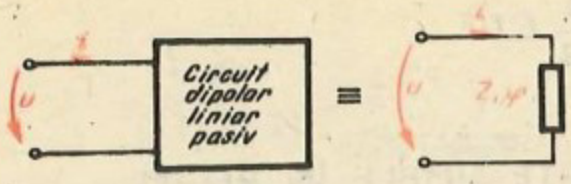


Fig. 2.27

toare, bobine și condensatoare, curentul va fi defazat în urma sau înaintea tensiunii, după natura circuitului, unghiul de defazaj fiind cuprins între $-\pi/2$ și $+\pi/2$ rad.

Defazajul se măsoară în *radiani*, ca și fazele inițiale.

Defazajul poate fi pozitiv, negativ sau nul. Defazajul este pozitiv cînd curentul se află în urma tensiunii. Dacă defazajul este nul, mărimile sinusoidale sînt *în fază*. Dacă defazajul este $\pm\pi/2$, mărimile sînt *în cuadratură*.

o **Observații.**

1) Admitanța este inversul impedanței și reciproc:

$$Y = \frac{1}{Z}\,; \quad Z = \frac{1}{Y}\,.$$

2) *Impedanța și defazajul caracterizează complet un circuit neramificat.* Dacă, de exemplu, se dă tensiunea sinusoidală la borne, impedanța și defazajul, intensitatea curentului prin circuit este univoc determinată:

$$i = \frac{U}{Z}\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta - \varphi).$$

3) Circuitele simple pot fi reprezentate cu simbolul utilizat pentru un rezistor ideal, pe care se specifică perechea de mărimi (Z, φ) (fig. 2.27). Uneori acest element echivalent circuitului se numește *impedor*. Impedanța și defazajul caracterizează complet un impedor.

Aplicația 1. *Tensiunea la borne și intensitatea curentului printr-un circuit dipolar au expresiile:*

$$u = 120\sqrt{2}\sin \omega t \ \text{(V)};$$

$$i = 2{,}4\sqrt{2}\sin(\omega t - \pi/6) \ \text{(A)}.$$

Să se calculeze impedanța, admitanța și defazajul.

Deoarece $U = 120$ V, $I = 2{,}4$ A, impedanța și admitanța au valorile:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{120}{2{,}4} = 50\ \Omega; \quad Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{50} = 0{,}02\ \text{S}.$$

Deoarece faza inițială a tensiunii este nulă și faza inițială a curentului este $\gamma = -\pi/6$, defazajul are valoarea

$$\varphi = \beta - \gamma = 0 - (-\pi/6) = +\pi/6.$$

Defazajul fiind pozitiv, curentul este în urma tensiunii.

Aplicația 2. *Curentul printr-un circuit este* $i = 0{,}2\sqrt{2}\sin \omega t$ *(A). Impedanța și defazajul circuitului au valorile* $Z = 100\ \Omega$; $\varphi = -\pi/2$. *Să se determine tensiunea aplicată la borne.*

Valoarea efectivă a tensiunii este $U = ZI = 100 \times 0{,}2 = 20$ V. Faza inițială a tensiunii este $\beta = \gamma + \varphi = \varphi = -\frac{\pi}{2}$. Deci:

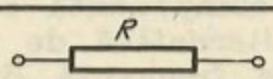
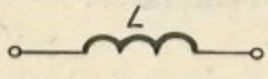
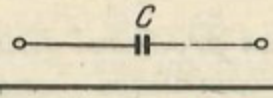
$$u = 20\sqrt{2}\sin(\omega t - \pi/2).$$

Curentul este defazat înaintea tensiunii cu $\pi/2$ radiani.

Aplicația 3. *Să se calculeze impedanța, admitanța și defazajul rezistorului, bobinei și condensatorului, considerate elemente ideale.*

Pornind de la definiție, obținem expresiile specificate în tabelul 2.1.

Tabelul 2.1

Elementul de circuit	Impedanța $\underline{Z}$	Admitanța $\underline{Y}$	Defazajul φ
	R	$\frac{1}{R} = G$	0
	ωL	$\frac{1}{\omega L}$	$+\frac{\pi}{2}$
	$\frac{1}{\omega C}$	ωC	$-\frac{\pi}{2}$

○ **Observații.** 1) Prin definiție, defazajul este pozitiv atunci cînd curentul este în urma tensiunii. Prin urmare, pentru bobina ideală, defazajul de $\frac{\pi}{2}$ considerat de la curent spre tensiune trebuie să apară în sensul pozitiv al axei absciselor (fig. 2.21). Pentru condensatorul ideal defazajul trebuie să fie reprezentat în sensul negativ al axei (fig. 2.24).

2) Tensiunea și curentul prin bobina ideală și prin condensatorul ideal sînt în cuadratură.

3) La o tensiune aplicată dată, impedanța unui element limitează curentul. Impedanța bobinei crește cu frecvența. Impedanța unui condensator ideal este invers proporțională cu frecvența.

Aplicația 4. *O bobină are inductivitatea $L = 2{,}3$ mH. Să se calculeze impedanța bobinei la:*

a) $f_1 = 50$ *Hz;*

b) $f_2 = 160$ *kHz.*

Bobina se va considera ideală.

a) $Z_L = \omega L = 2\pi f_1 L = 2\pi \times 50 \times 2{,}3 \cdot 10^{-3} = 0{,}7226\ \Omega.$

b) $Z_L = 2\pi f_2 L = 2\pi \times 160 \cdot 10^3 \times 2{,}3 \cdot 10^{-3} = 2\,312\ \Omega = 2{,}312\ \text{k}\Omega.$

Aplicația 5. *Un condensator are capacitatea de 5,6 nF. Să se calculeze impedanța condensatorului la:*

a) $f_1 = 50$ *Hz;*

b) $f_2 = 160$ *kHz.*

a) $Z_C = \frac{1}{\omega C} = 1/(2\pi f_1 C) = (2\pi \times 50 \times 5{,}6 \cdot 10^{-9})^{-1} = 5{,}684 \cdot 10^5\ \Omega.$

b) $Z_C = 1/(2\pi f_2 C) = (2\pi \times 160 \cdot 10^3 \times 5{,}6 \cdot 10^{-9})^{-1} = 177{,}62\ \Omega.$

2. Puterea activă, puterea reactivă şi puterea aparentă

Un circuit dipolar sub tensiunea la borne $u = U\sqrt{2}\sin \omega t$ absoarbe de la sursa de alimentare curentul sinusoidal $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi)$, defazat faţă de tensiune (fig. 2.28, *a* şi *b*).

• **Puterea instantanee** la borne este

$$p = ui = 2UI \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) =$$
$$= UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t - \varphi),$$

deoarece $2\sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$, conform unei identităţi trigonometrice cunoscute.

• **Puterea activă** *este media pe o perioadă a puterii instantanee.* Din figura 2.28, *c* se observă că puterea instantanee p are o componentă constantă, $UI\cos\varphi$, peste care se suprapune o componentă alternativă de frecvenţă dublă, de amplitudine UI. Deoarece componenta de frecvenţă dublă are valoarea medie nulă, rezultă pentru puterea activă relaţia

$$\tilde{p} = P = UI\cos\varphi \geqslant 0. \qquad (2.20)$$

Puterea activă a unui circuit dipolar *se calculează ca produsul dintre valorile efective ale tensiunii şi curentului multiplicat prin cosinusul unghiului de defazaj dintre curent şi tensiune.*

Puterea activă corespunde unui *aport mediu de energie electromagnetică.* Într-adevăr, urmărind graficul puterii instantanee (fig. 2.28, *c*) observăm că într-o perioadă, în două intervale, circuitul primeşte energie pe la borne (ariile haşurate, marcate cu ⊕) şi în celelalte două circuitul cedează energie pe la borne (ariile haşurate, marcate cu ⊖). Într-o perioadă energia cedată fiind mai mică decît cea primită, circuitul primeşte efectiv energie pe la borne.

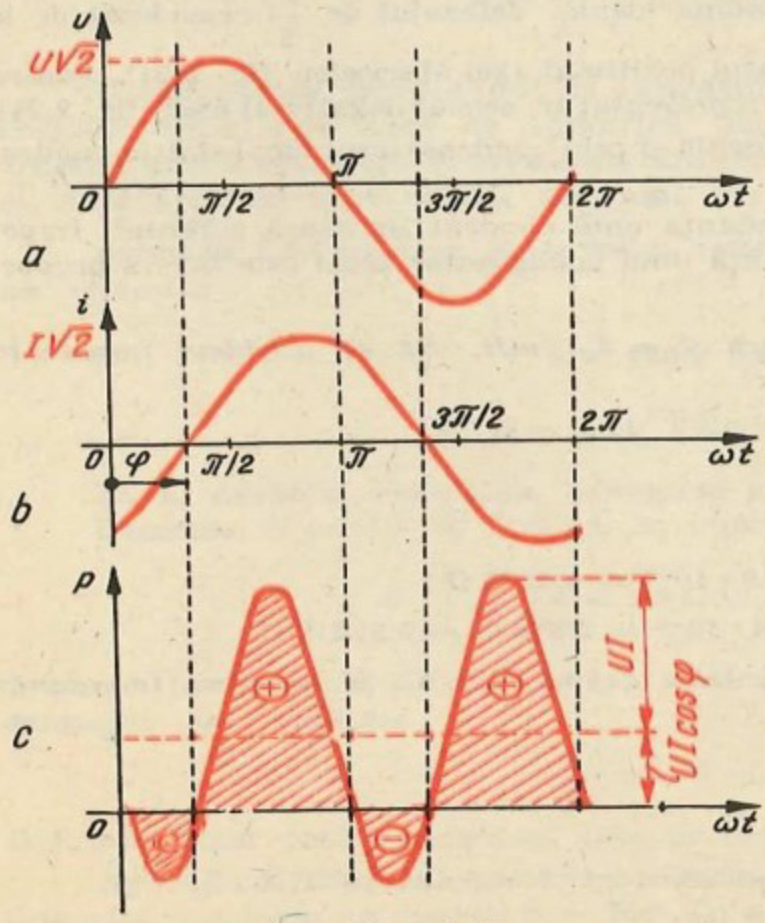


Fig. 2.28

○ **Notă.** Pentru un *rezistor ideal* $\varphi = 0$ şi $U = RI$, astfel că $P_R = UI = RI^2$. Pentru o *bobină ideală* defazajul este $+\pi/2$, pentru un *condensator ideal* $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. În amîndouă cazurile $\cos\varphi = 0$ şi puterea activă este nulă. Regăsim astfel valorile puterii active pentru cele trei elemente ideale, obţinute la studiul acestor elemente în regim sinusoidal.

• Prin analogie cu expresia puterii active, se defineşte **puterea reactivă,** prin relaţia:

$$Q = UI \sin \varphi \gtrless 0. \qquad (2.21)$$

Puterea reactivă a unui circuit dipolar *este produsul dintre valorile efective ale tensiunii şi curentului multiplicat prin sinusul unghiului de defazaj dintre curent şi tensiune.*

○ **Notă.** Se verifică imediat că pentru un *rezistor ideal* $Q_R = 0$, deoarece $\sin \varphi = 0$, în timp ce pentru o *bobină ideală*, pentru care $\varphi = +\pi/2$ şi $\sin \varphi = 1$, rezultă

$$Q_L = UI = X_L I^2 > 0,$$

iar pentru un *condensator ideal*, pentru care $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ şi $\sin \varphi = -1$, rezultă

$$Q_C = -UI = X_C I^2 < 0.$$

Regăsim astfel valorile puterii reactive obţinute la studiul elementelor ideale de circuit în regim sinusoidal.

Să observăm că datorită convenţiei de definiţie a defazajului pozitiv (curentul în urma tensiunii), puterea reactivă este pozitivă la bobine şi negativă la condensatoare.

• În regim sinusoidal se poate calcula o putere „ca în curent continuu". Aceasta este **puterea aparentă.**

Se numeşte **putere aparentă a unui circuit dipolar** *produsul dintre valorile efective ale tensiunii şi curentului.* Se notează cu simbolul S.

$$S = UI > 0. \qquad (2.22)$$

Puterea aparentă se măsoară în *volt-amperi* (VA).

○ **Observaţie.** La aceleaşi valori efective ale tensiunii şi curentului şi la defazaj variabil, puterea aparentă corespunde valorii maxime a puterii active: $P = S$ (dacă $\varphi = 0$).

• Se numeşte **factor de putere** *raportul dintre puterea activă şi cea aparentă*

$$k_p = \frac{P}{S} = \cos \varphi > 0 \qquad (2.23)$$

Pentru ca o instalaţie să funcţioneze cu maximum de putere activă, adică cu eficacitate maximă, factorul de putere trebuie să fie *cît mai aproape de unitate.*

• **Triunghiul puterilor.** Puterile activă, reactivă şi aparentă satisfac relaţiile:

$$P = S \cos \varphi; \; Q = S \sin \varphi;$$
$$S^2 = P^2 + Q^2; \; P \operatorname{tg} \varphi = Q.$$

Aceste relaţii ne arată că se poate construi un triunghi al puterilor ca în figura 2.29.

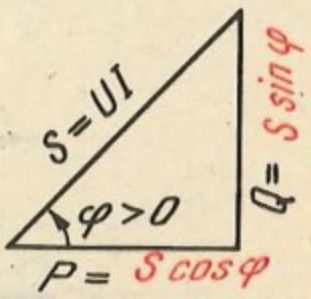


Fig. 2.29

Aplicația 1. *Un consumator inductiv, alimentat sub o tensiune sinusoidală având valoarea efectivă 220 V, absoarbe un curent având valoare efectivă 11,2 A. Dacă curentul este defazat în urma tensiunii cu un unghi de 12°, să se calculeze:*

a) *puterile activă, reactivă și aparentă;*

b) *factorul de putere.*

a) $P = UI \cos \varphi = 220 \times 11{,}2 \times \cos 12° = 2\,410{,}16$ W;
$Q = UI \sin \varphi = 220 \times 11{,}2 \times \sin 12° = 512{,}29$ var;
$S = UI = 220 \times 11{,}2 = 2\,464$ VA.

b) $k_p = \cos \varphi = \cos 12° = 0{,}978$.

Aplicația 2. *O instalație de putere activă 2 kW alimentată la tensiunea sinusoidală, având valoarea efectivă 380 V, funcționează cu factorul de putere $k_p = 0{,}8$. În urma unor măsuri de ameliorare a factorului de putere, instalația funcționează la factorul de putere $k_p = 0{,}96$. Să se calculeze valorile efective ale curenților absorbiți înainte și după ameliorarea factorului de putere.*

$$I_1 = \frac{P}{U \cos \varphi_1} = \frac{2\,000}{380 \times 0{,}8} = 6{,}58 \text{ A};$$

$$I_2 = \frac{P}{U \cos \varphi_2} = \frac{2\,000}{380 \times 0{,}96} = 5{,}48 \text{ A}.$$

Instalația cu factorul de putere ameliorat consumă aceeași putere activă la un curent cu 16,72% mai mic.

3. Circuitul R,L serie

Să considerăm circuitul format dintr-un rezistor de rezistență R legat în serie cu o bobină de inductivitate L (fig. 2.30, *a*), sub tensiunea sinusoidală la borne $u = U\sqrt{2}\sin \omega t$.

• Așa cum am arătat în subcapitolul D.1, pentru a caracteriza complet circuitul este necesar **să găsim expresia impedanței și defazajului.** Vom utiliza în acest scop diagrama vectorială.

Tensiunea la borne este suma căderilor de tensiune pe cele două elemente și de aceea:

$$u = u_R + u_L.$$

Ecuația vectorială asociată acestei relații este

$$\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L.$$

Rezultatele obținute la studiul elementelor ideale în regim sinusoidal ne arată că:

$$U_R = RI \text{ și } \vec{U}_R \uparrow\uparrow \vec{I};$$

$$U_L = \omega LI \text{ și } \vec{U}_L \perp \vec{I} \text{ (cu } \vec{I} \text{ în urmă)}.$$

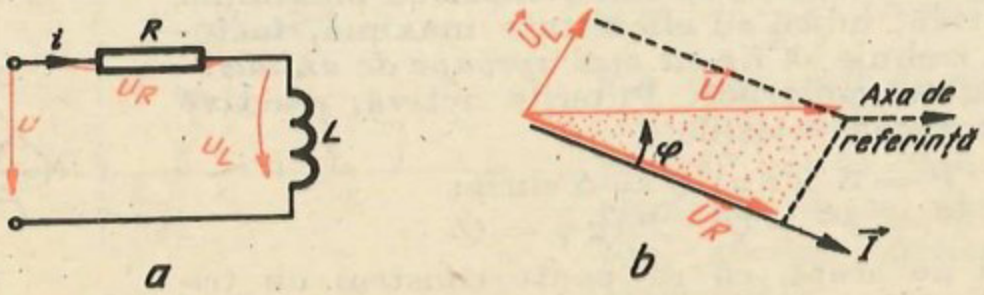


Fig. 2.30

Să presupunem cunoscut vectorul $\vec{I}$. Vectorii $\vec{U}_R$, $\vec{U}_L$ și vectorul sumă $\vec{U}$ se reprezintă atunci ca în figura 2.30, *b*.

Din această diagramă vectorială rezultă

$$U^2 = U_R^2 + U_L^2 = (R^2 + \omega^2 L^2) I^2;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L}{U_R} = \frac{\omega L}{R},$$

deoarece triunghiul cu laturile U, U_R și U_L este dreptunghic. Din aceste relații *obținem impedanța* și *defazajul* circuitului:

$$\frac{U}{I} = \boxed{Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}; \quad \boxed{\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L}{R}}. \tag{2.24}$$

Unghiul φ este pozitiv și are valori cuprinse între zero și $\pi/2$ rad.

• **Curentul** este defazat în urma tensiunii cu unghiul φ și are *valoarea efectivă* $I = U/Z$.

Expresia instantanee a curentului este

$$\boxed{i = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L}{R}\right)}. \tag{2.25}$$

• **Triunghiul tensiunilor.** Valorile efective ale căderilor de tensiune rezistivă și inductivă satisfac relațiile

$$U_R = RI = U \cos \varphi;$$
$$U_L = \omega L I = U \sin \varphi,$$

așa cum se observă din triunghiul tensiunilor cu laturile U, U_R și U_L, construit în figura 2.31, *a*.

• Pornind de la triunghiul tensiunilor, putem construi două triunghiuri asemenea: **triunghiul impedanțelor** (fig. 2.31, *b*) cu laturile Z, R și X și **triunghiul puterilor** (fig. 2.31, *c*) cu laturile S, P și Q. Pentru aceasta să observăm că prin împărțirea la I a valorilor efective U_R și U_L obținem

$$R = \frac{U_R}{I} = \frac{U}{I} \cos \varphi = Z \cos \varphi; \quad X = \omega L = \frac{U_L}{I} = \frac{U}{I} \sin \varphi = Z \sin \varphi,$$

iar prin înmulțirea cu I rezultă

$$U_R I = RI^2 = UI \cos \varphi = P; \quad U_L I = \omega L I^2 = UI \sin \varphi = Q.$$

Puterea activă se disipă în rezistor: $P = RI^2$.
Puterea reactivă în circuit este $Q = XI^2 = \omega L I^2 > 0$.
Puterea aparentă este $S = UI = ZI^2 = U^2/Z$.

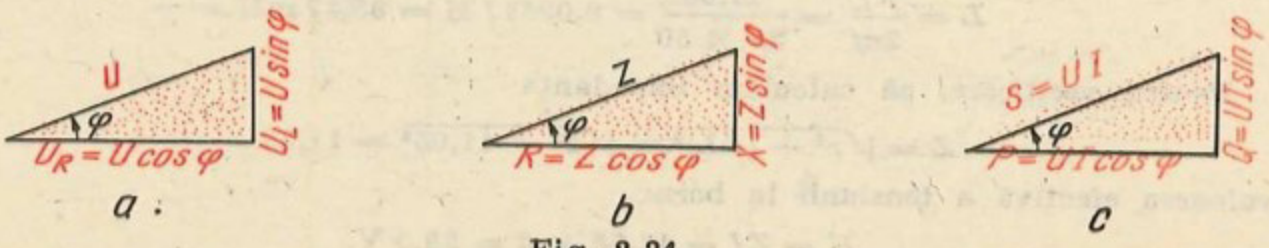


Fig. 2.31

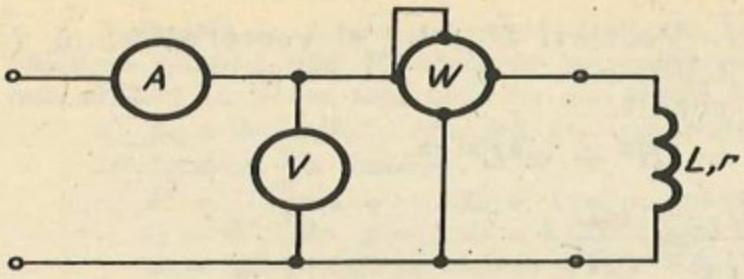


Fig. 2.32

Aplicaţia 1. *Circuitul R, L serie echivalent unei bobine are L = 4,2 mH şi R = 6,1 Ω. Să se calculeze:*

a) *reactanţa şi impedanţa bobinei;*

b) *valoarea efectivă a curentului absorbit de la o sursă de tensiune avînd valoarea efectivă U = 10 V. Frecvenţa tensiunii de alimentare este f = 2 500 Hz.*

a) $X_L = 2\pi fL = 2\pi \times 2\,500 \times \times 4{,}2 \cdot 10^{-3} = 65{,}97\ \Omega \cong 66\ \Omega$;

$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{6{,}1^2 + 66^2} = 66{,}25\ \Omega.$

b) $I = U/Z = 10/66{,}25 = 0{,}15094\ \text{A} \cong 151\ \text{mA}.$

Aplicaţia 2. *Să se calculeze puterile activă, reactivă şi aparentă într-un circuit R, L serie avînd rezistenţa 3 Ω şi reactanţa 4 Ω, străbătut de un curent de valoare efectivă 4 A.*

Deoarece $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\ \Omega$, tensiunea la borne are valoarea efectivă $U = ZI = 5 \times 4 = 20$ V. Defazajul este $\varphi = \text{arc tg}\,(X/R) = \text{arc tg}\,(4/3) = 53{,}10°$. Prin urmare:

$P = UI \cos \varphi = 20 \times 4 \times \cos 53{,}13° = 48$ W;

$Q = UI \sin \varphi = 20 \times 4 \times \sin 53{,}13° = 64$ var;

$S = UI = 20 \times 4 = 80$ VA.

Aplicaţia 3. *Pentru măsurarea parametrilor r, L ai unei bobine reale se realizează montajul experimental din figura 2.32, alimentat la o tensiune de frecvenţă industrială f = 50 Hz. Curentul prin circuit se stabileşte la 2 A. Să se calculeze r şi L dacă voltmetrul indică 23,5 V şi watmetrul 16 W. Se va neglija influenţa rezistenţelor aparatelor de măsurat.*

Watmetrul indică puterea activă disipată în rezistenţa r a înfăşurării bobinei. Deci

$$r = \frac{P}{I^2} = \frac{16}{2^2} = 4\ \Omega.$$

Puterea aparentă primită de bobină pe la borne este

$$S = UI = 23{,}5 \times 2 = 47\ \text{VA}.$$

Dar $P = S \cos \varphi$ şi deci

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{16}{47} = 0{,}340 \rightarrow \sin \varphi = 0{,}940.$$

Puterea reactivă este

$$Q = S \sin \varphi = 47 \times 0{,}940 = 44{,}19\ \text{var}.$$

Însă

$$Q = X_L I^2 \rightarrow X_L = Q/I^2 = 44{,}19/2^2 = 11{,}05\ \Omega.$$

Deci

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{11{,}05}{2\pi \times 50} = 0{,}03517\ \text{H} = 35{,}17\ \text{mH}.$$

Pentru verificare, să calculăm impedanţa

$$Z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{2^2 + 11{,}05^2} = 11{,}75$$

şi valoarea efectivă a tensiunii la borne

$$U = ZI = 11{,}75 \times 2 = 23{,}5\ \text{V}.$$

4 Circuitul R, C serie

Circuitul alcătuit prin înserierea unui rezistor R cu un condensator C (fig. 2.33, *a*) are tensiunea la borne $u = U\sqrt{2}\sin \omega t$. Să rezolvăm circuitul cu ajutorul reprezentării vectoriale, așa cum s-a rezolvat circuitul R, L serie.

• **Impedanța și defazajul.** Tensiunea la borne este suma tensiunilor pe elemente. Între vectorii asociați este valabilă relația

$$\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_C.$$

Dar

$$U_R = RI \quad \text{și} \quad \vec{U}_R \uparrow\uparrow \vec{I};$$

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I \quad \text{și} \quad \vec{U}_C \perp \vec{I} \text{ (cu } \vec{I} \text{ înainte)},$$

astfel că diagrama vectorială este cea indicată în figura 2.33, *b*. Din diagramă deducem

$$U^2 = U_R^2 + U_C^2 = I^2\left[R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right];$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{U_C}{U_R} = -\frac{1}{\omega CR},$$

deoarece triunghiul cu laturile U, U_R și U_C este dreptunghic și defazajul, considerat de la curent spre tensiune, este negativ (apare în sens invers trigonometric).

Impedanța și *defazajul* sînt:

$$\frac{U}{I} = \boxed{Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \; ; \quad \boxed{\varphi = -\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\omega CR}} \qquad (2.26)$$

Unghiul de defazaj poate lua valori cuprinse între $-\pi/2$ radiani și zero.

• **Curentul** în circuitul R, C serie are *valoarea efectivă* $I = U/Z$ și este defazat înaintea tensiunii. *Valoarea lui instantanee* va fi

$$\boxed{i = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \sqrt{2}\sin\left(\omega t + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\omega CR}\right)} \qquad (2.27)$$

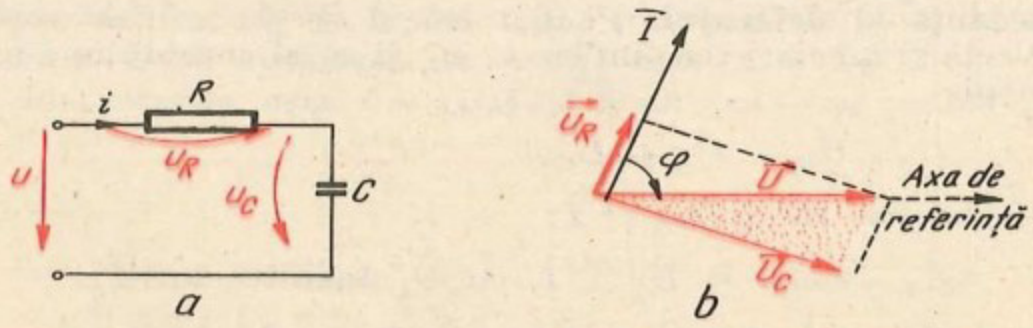


Fig. 2.33

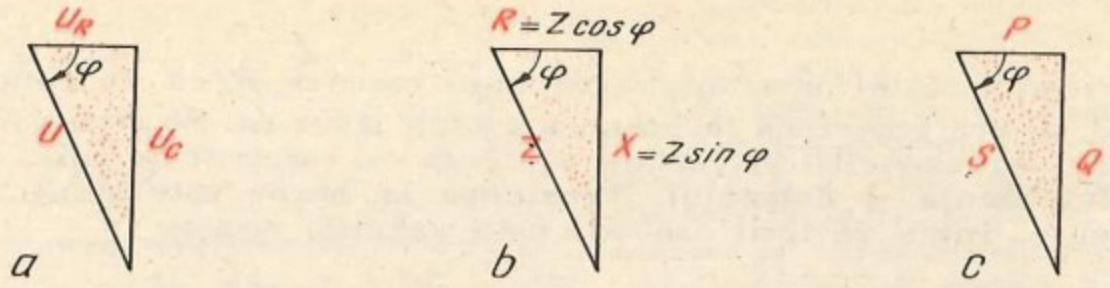


Fig. 2.34

• Pe baza diagramei vectoriale se pot construi **triunghiul tensiunilor,** cu laturile U, U_R și U_C (fig. 2.34, *a*), **triunghiul impedanțelor,** cu laturile Z, R și X (fig. 2.34, *b*) și **triunghiul puterilor,** cu laturile S, P și Q (fig. 2.34, *c*). Se observă că reactanța circuitului este $X = Z \sin \varphi$ și rezultă negativă, deoarece $\varphi < 0$.

Puterile în circuit sînt:

$$P = UI \cos \varphi = RI^2 > 0 \qquad \textit{(puterea activă);}$$
$$Q = UI \sin \varphi = XI^2 < 0 \qquad \textit{(puterea reactivă);}$$
$$S = UI = ZI^2 = U^2/Z > 0 \qquad \textit{(puterea aparentă).}$$

Puterea reactivă Q este de asemenea negativă, deoarece $\varphi < 0$. Deci, circuitul fiind capacitiv, *reactanța și puterea reactivă sînt negative, ca la un condensator ideal.*

Aplicație. *Un circuit este alcătuit dintr-un condensator de 4 μF și un rezistor de 470 Ω. Valoarea efectivă a curentului prin circuit este de 0,1 A la 500 Hz. Să se calculeze:*

a) *reactanța și impedanța circuitului;*

b) *puterile activă și reactivă în circuit.*

a) $X_C = \dfrac{-1}{2\pi f C} = -(2\pi \times 500 \times 4 \cdot 10^{-6})^{-1} = -79{,}58\ \Omega;$

$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{470^2 + 79{,}59^2} = 476{,}69\ \Omega.$

b) Puterea activă este disipată numai în rezistor. Deci

$$P = RI^2 = 470 \times 10^{-2} = 4{,}7\ \text{W}.$$

Puterea reactivă a condensatorului este

$$Q_C = -79{,}58 \times 10^{-2} = -0{,}7958\ \text{var}.$$

5. Circuitul R, L, C serie. Rezonanța de tensiune

Circuitul R, L, C în care elementele de circuit sînt legate în serie este reprezentat în figura 2.35, *a*.

• **Impedanța și defazajul.** Pentru calcul se va utiliza reprezentarea vectorială. Vectorii asociați tensiunilor u, u_R și u_L și curentului i prin circuit satisfac relațiile

$$\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L + \vec{U}_C;$$

$$U_R = RI \text{ și } \vec{U}_R \uparrow\uparrow \vec{I};$$

$$U_L = \omega L I \text{ și } \vec{U}_L \perp \vec{I}, \text{ cu } \vec{U}_L \text{ înaintea lui } \vec{I};$$

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I \text{ și } \vec{U}_C \perp \vec{I}, \text{ cu } \vec{U}_C \text{ în urma lui } \vec{I}.$$

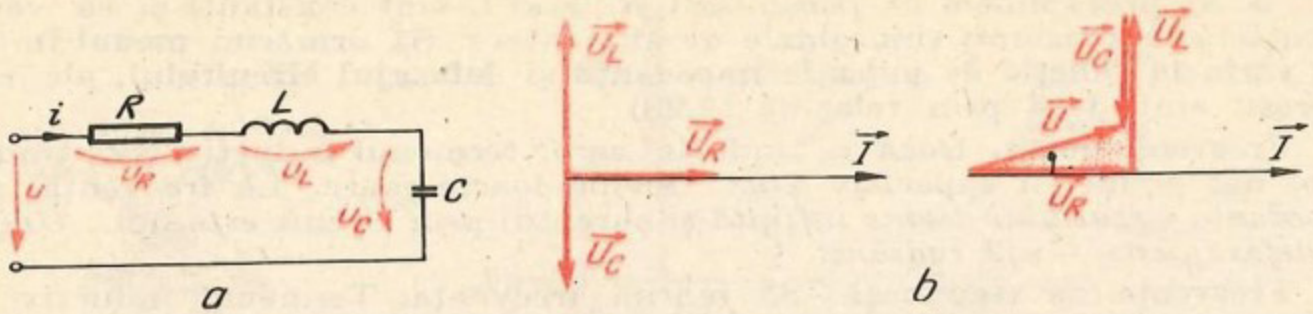


Fig. 2.35

Diagrama vectorială corespunzătoare acestor relaţii, construită în ipoteza $U_L > U_C$, este indicată în figura 2.35, *b*. Din triunghiul dreptunghic cu laturile U, U_R şi $U_X = U_L - U_C$, rezultă:

$$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = (U_L - U_C)/U_R.$$

Înlocuind valorile efective ale căderilor de tensiune cu expresiile lor, obţinem

$$U^2 = I^2\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right];$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}.$$

Prin urmare, *impedanţa circuitului* şi *defazajul* sînt:

$$\frac{U}{I} = Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}; \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} \qquad (2.28)$$

În ipoteza admisă: $U_L > U_C$, $\omega L > 1/\omega C$, defazajul rezultă pozitiv. Curentul este defazat în urma tensiunii şi de aceea spunem că *circuitul se comportă inductiv*.

• Cunoscînd impedanţa şi defazajul, putem determina **curentul instantaneu** absorbit. Dacă tensiunea la borne este $u = U\sqrt{2}\sin \omega t$, expresia curentului instantaneu este $i = (U/Z)\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi)$, adică

$$i = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}\right) \qquad (2.29)$$

• Să presupunem că parametrii R, L și C sînt constanți și că variem pulsația ω a tensiunii sinusoidale de alimentare. Să urmărim **modul în care vor varia în funcție de pulsație impedanța și defazajul circuitului,** ale căror expresii sînt date prin relațiile (2.28).

Frecvențe joase. Dacă ω tinde la zero, termenul inductiv ωL tinde la zero, dar termenul capacitiv $1/\omega C$ devine foarte mare. La frecvență zero, *impedanța circuitului devine infinită* și curentul prin circuit este nul. *Unghiul de defazaj este* $-\pi/2$ *radiani.*

Frecvența de rezonanță. Să mărim frecvența. Termenul inductiv ωL crește, termenul capacitiv scade. Diferența lor descrește și impedanța circuitului scade. Constatăm că la frecvența la care

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \tag{2.30}$$

impedanța circuitului este minimă și egală cu rezistența R din circuit, iar *defazajul este nul.* Atunci cînd condiția (2.30) este îndeplinită, se spune că circuitul R, L, C serie este la rezonanță. Pulsația de rezonanță și frecvența de rezonanță vor fi:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \tag{2.31}$$

Frecvențe înalte. Să mărim frecvența dincolo de frecvența de rezonanță. Impedanța devine din nou mai mare decît R. Defazajul crește. Cînd frecvența devine foarte mare, termenul inductiv ωL crește foarte mult, *impedanța devine de asemenea foarte mare* și *unghiul de defazaj se apropie de* $+\pi/2$ *radiani.*

Variația impedanței cu pulsația este arătată în figura 2.36.

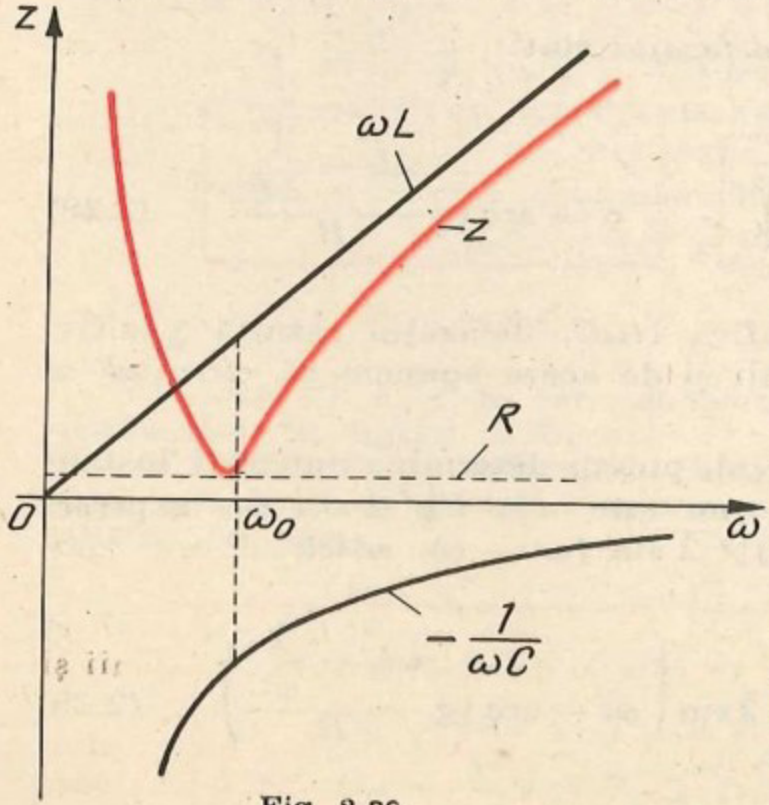


Fig. 2.36

○ **Concluzii.** Atunci cînd circuitul R, L, C serie este alimentat cu o tensiune sinusoidală de aceeași frecvență cu cea de rezonanță, se manifestă următoarele proprietăți: defazajul este nul; impedanța este minimă; tensiunea și curentul sînt în fază; căderile de tensiune la bornele bobinei și condensatorului au valori efective egale; curentul prin circuit este minim; căderile de tensiune pe bobină și condensator sînt maxime; puterea reactivă este nulă.

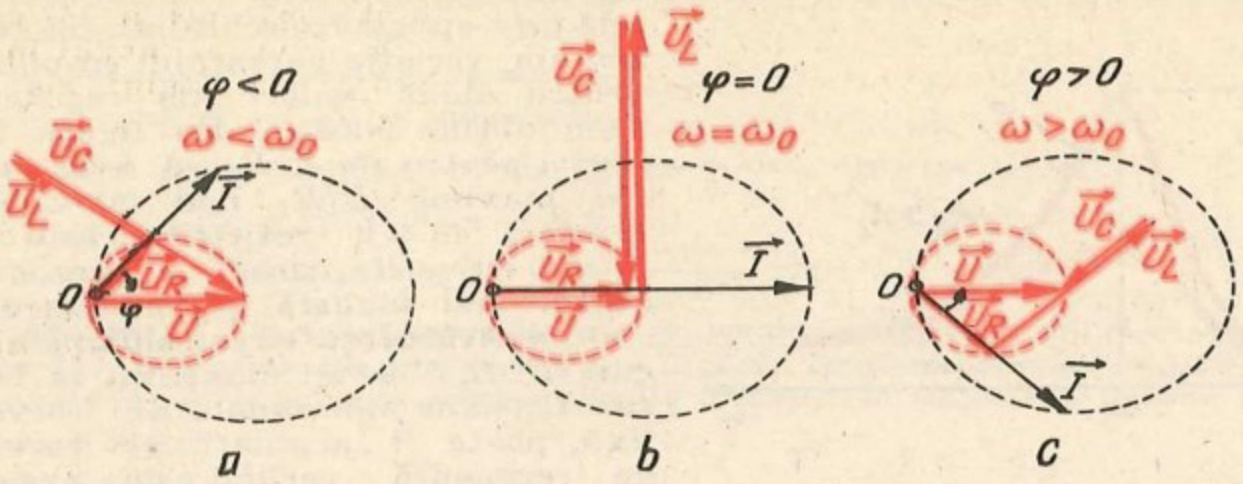


Fig. 2.37

• **Modul de variaţie cu pulsaţia a curentului şi a căderilor de tensiune pe bobină şi pe condensator** pot fi urmărite pe cele trei diagrame vectoriale din figura 2.37.

Să observăm mai întîi că, deoarece triunghiul cu laturile U, U_R şi $U_X = U_L - U_C$ este dreptunghic şi are ipotenuza U constantă, vîrful vectorului $\vec{U}_R$ trebuie să descrie un cerc cu diametrul U. Se mai observă că, deoarece $\vec{U} = R\vec{I}$ vîrful vectorului $\vec{I}$ descrie de asemenea un cerc, cu diametrul U/R.

Frecvenţe joase. Dacă frecvenţa este nulă, vectorii $\vec{I}$ şi $\vec{U}_R$ se află în punctul 0. Mărim pulsaţia pînă la o valoare $\omega < \omega_0$. Curentul prin circuit a crescut, este defazat înaintea tensiunii, deoarece $U_L < U_C$ (fig. 2.37, *a*) şi *circuitul se comportă capacitiv*.

La rezonanţă (fig. 2.37, *b*) curentul prin circuit este maxim, este în fază cu tensiunea la borne, iar căderile de tensiune pe bobină şi condensator:

$$U_L\big|_{\omega_0} = \omega_0 L I_0 = \frac{\omega_0 L}{R} U;$$

$$U_C\big|_{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0 C} I_0 = \frac{1}{\omega_0 C R} U = \frac{\omega_0 L}{R} U$$

ating valorile maxime şi circuitul se comportă pur rezistiv.

○ **Notă.** Deoarece căderile de tensiune pe bobină şi condensator trec, la rezonanţă, prin valorile lor maxime, *rezonanţa serie* se mai numeşte *rezonanţă de tensiune*.

Frecvenţe înalte. Dincolo de rezonanţă, la o pulsaţie $\omega > \omega_0$ (fig. 2.37, *c*) curentul scade sub valoarea de la rezonanţă, este defazat în urma tensiunii şi *circuitul se comportă inductiv*.

Rezistenţa circuitului influenţează curba de rezonanţă a curentului. Să admitem că L şi C sînt constante şi că o tensiune sinusoidală de valoare

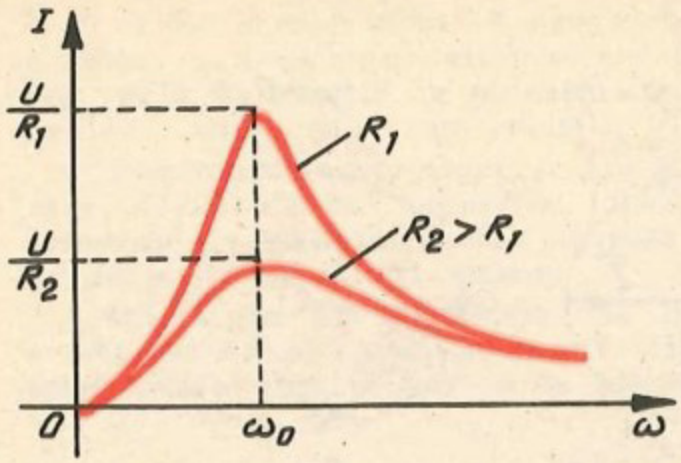


Fig. 2.38

efectivă constantă şi frecvenţă variabilă este aplicată circuitului. Să reprezentăm variaţia curentului cu pulsaţia pentru două valori ale rezistenţei. Vom obţine curbele din figura 2.38. Curba pentru $R_1 < R_2$ va avea valoarea maximă U/R_1 mai mare. Prin urmare, cu cît rezistenţa este mai mică, cu atît curba de rezonanţă devine mai îngustă şi mai ascuţită.

• **Acordarea circuitului.** Un circuit R, L, C serie, alimentat la borne sub tensiune sinusoidală de frecvenţă fixă, poate fi „acordat" pe frecvenţa de rezonanţă variind de exemplu capacitatea condensatorului (inductivitatea L şi rezistenţa R fiind menţinute constante). Într-adevăr, variind pe C pînă la C_0 astfel ca $\omega L = 1/\omega C_0$, obţinem rezonanţa.

• **Factorul de calitate al circuitului.** Să observăm că la rezonanţă tensiunile pe bobină şi condensator sînt mai mari decît tensiunea de alimentare, în raportul

$$\frac{U_L|_{\omega_0}}{U} = \frac{U_C|_{\omega_0}}{U} = \frac{\omega_0 L}{R}.$$

Factorul

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} \tag{2.32}$$

se numeşte *factorul de calitate al circuitului rezonant*. El este cu atît mai mare cu cît rezistenţa circuitului este mai mică faţă de reactanţa inductivă de la rezonanţă.

În circuitele rezonante utilizate în radiotehnică, factorul de calitate atinge valori foarte mari, de ordinul sutelor. Circuitele cu rezonanţă de tensiune pot fi deci utilizate la amplificarea unor tensiuni slabe.

• Să calculăm **diferenţa valorilor medii ale energiei magnetice şi electrice acumulate în circuit.** Obţinem

$$\tilde{W}_m - \tilde{W}_e = \frac{1}{2} L\tilde{i}^2 - \frac{1}{2} C\tilde{u}_C^2 = \frac{1}{2} LI^2 - \frac{1}{2} CU_C^2 =$$

$$= \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\frac{I^2}{2\omega} = \frac{Q}{2\omega},$$

ceea ce ne permite să interpretăm puterea reactivă ca o măsură a necompensării (în medie) a schimburilor interioare de energie între cîmpul magnetic şi cîmpul electric.

Aplicația 1. *O bobină de inductivitate 12,4 mH și rezistență 6 Ω este înseriată cu un condensator de 5,6 nF. Să se calculeze:*

a) *pulsația și frecvența de rezonanță;*

b) *factorul de calitate al circuitului.*

a) $\omega_0 = (LC)^{-1/2} = (12{,}4 \cdot 10^{-3} \times 5{,}6 \cdot 10^{-9})^{-1/2} = 120 \cdot 10^3$ rad/s;

$f_0 = \omega_0/2\pi = 120 \cdot 10^3/2\pi = 19{,}1$ kHz.

b) $Q_0 = \omega_0 L/R = 120 \cdot 10^3 \times 12{,}4 \cdot 10^{-3}/6 = 272.$

Aplicația 2. *Un circuit rezonant serie cu parametrii $C = 120$ pF, $L = 0{,}2110$ mH și $R = 100$ Ω are frecvența de rezonanță $f_0 = 1$ MHz. Dacă tensiunea aplicată are valoarea efectivă 0,1 V, să se calculeze valoarea efectivă a căderii de tensiune pe rezistor la:*

a) *1 MHz;*

b) *0,9 MHz.*

a) În adevăr:

$\omega_0 = (LC)^{-1/2} = (0{,}2110 \cdot 10^{-3} \times 120 \cdot 10^{-12})^{-1/2} = 6{,}284 \cdot 10^6$ rad/s $\rightarrow f_0 = 1$ MHz.

Deci $U_R = U = 0{,}1$ V la $f_1 = 1$ MHz.

b) $X = \omega_2 L - 1/\omega_2 C = 2\pi \times 0{,}9 \cdot 10^6 \times 0{,}2110 \cdot 10^{-3} - (2\pi \times 0{,}9 \cdot 10^6 \times 120 \cdot 10^{-12})^{-1} =$

$= 514{,}6\ \Omega$; $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{100^2 + 514{,}6^2} = 524{,}22\ \Omega$;

$U_R = RI = (R/Z)U = (100/524{,}22) \times 0{,}1 = 0{,}0190$ V la $f_2 = 0{,}9$ MHz.

Raportul celor două valori este $0{,}1/0{,}019 = 5{,}26$. La frecvența de rezonanță se obține o tensiune de 5,26 ori mai mare decît la o frecvență mai mică cu 10%.

6. Circuitul R, L, C paralel. Rezonanța de curent

Legarea în paralel a celor trei elemente R, L, C este arătată în schema din figura 2.39.

• **Antirezonanță.** Deoarece reactanța bobinei crește cu frecvența și reactanța condensatorului scade cu frecvența, iar cele două reactanțe au semne contrare, va exista o frecvență la care tensiunea u aplicată și curentul i total sînt în fază; la această frecvență se manifestă un fenomen de rezonanță ca și în circuitul R, L, C serie. Comportarea la rezonanță va fi exact opusă ca la circuitul serie; de aceea fenomenul se mai numește *antirezonanță.*

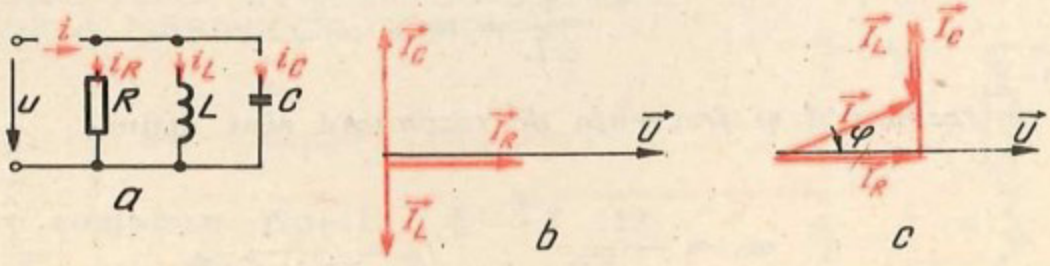


Fig. 2.39

• **Admitanța și defazajul.** Să scriem relațiile vectoriale în circuit. Cu notațiile din figura 2.39 vom obține

$$i = i_R + i_C + i_L \rightarrow \vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_C + \vec{I}_L, \tag{2.33}$$

la care se adaugă relațiile corespunzătoare între tensiunea și curentul pe cele trei elemente

$$U = RI_R \text{ și } \vec{U} \uparrow\uparrow \vec{I}_R; \tag{2.34}$$

$$U = \omega L I_L \text{ și } \vec{I}_L \perp \vec{U} \text{ (în urmă);} \tag{2.35}$$

$$U = \frac{1}{\omega C} I_C \text{ și } \vec{I}_C \perp \vec{U} \text{ (înainte).} \tag{2.36}$$

Diagrama vectorială este indicată în figurile 2.39, *b* și *c*. Din triunghiul cu laturile I, I_R și $I_X = I_C - I_L$ se deduce

$$I^2 = I_R^2 + (I_C - I_L)^2; \quad \operatorname{tg} \varphi = - \frac{I_C - I_L}{I_R}.$$

Înlocuind curenții I_R, I_L și I_C cu relațiile (2.34), (2.35) și (2.36), obținem

$$I^2 = U^2 \left[\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2 \right]; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{\frac{1}{R}} = \frac{R}{\omega L} - \omega C R.$$

Admitanța și *defazajul* sînt deci

$$\boxed{\frac{I}{U} = Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2}} \; ; \quad \boxed{\varphi = \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{R}{\omega L} - \omega C R \right)} \tag{2.37}$$

• **Variația admitanței și defazajului cu pulsația.** Se observă că defazajul se anulează la frecvența la care

$$\frac{1}{\omega L} = \omega C.$$

Pulsația de rezonanță și *frecvența de rezonanță* sînt atunci

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \; ; \quad \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}}$$

și au aceleași expresii ca și la circuitul R, L, C serie.

Să analizăm circuitul la rezonanță. *Admitanța este minimă* și are valoarea

$$Y(\omega_0) = \frac{1}{R} = \min(Y).$$

Dacă frecvența crește sau scade față de valoarea de rezonanță, admitanța crește, impedanța $Z = 1/Y$ scade și prin urmare curentul total prin circuit crește. Curbele de variație ale acestor mărimi sînt reprezentate în figura 2.40.

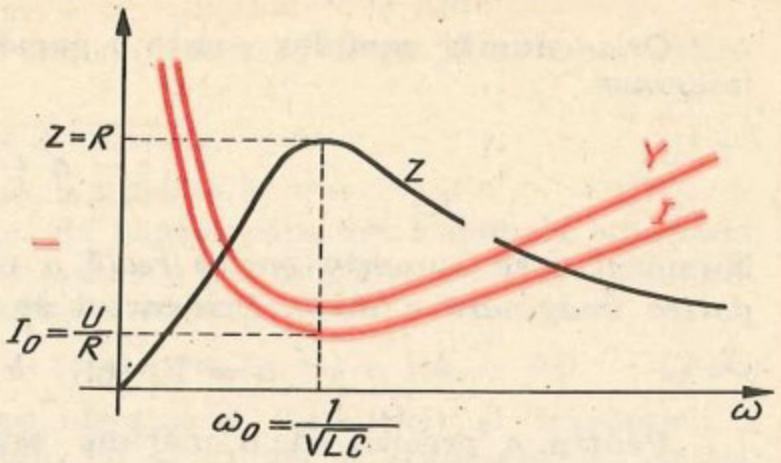


Fig. 2.40

• **Variația curentului cu pulsația.** Curenții prin bobină și condensator ating valorile lor maxime la rezonanță și sînt de Q_0 ori mai mari decît curentul total $I_0 = \frac{U}{R}$ absorbit la rezonanță:

$$I_L\big|_{\omega_0} = \frac{U}{\omega_0 L} = I_0 \frac{R}{\omega_0 L} = Q_0 I_0;$$

$$I_C\big|_{\omega_0} = \omega_0 C U = I_0 \frac{\omega_0 C}{R} = Q_0 I_0, \qquad (2.38)$$

unde $Q_0 = R/\omega_0 L$ este factorul de calitate al circuitului. De aceea rezonanța în circuitul paralel se numește *rezonanță de curent.*

• **Circuit** L, C. Circuitul paralel care are cea mai largă aplicație practică este circuitul cu două ramuri din figura 2.41. Acest circuit are multe dintre proprietățile circuitului din figura 2.39, *a*. Astfel, la rezonanță admitanța este minimă, impedanța — maximă, curentul total este minim și curenții prin cele două ramuri ating valori maxime. Frecvența de rezonanță este apropiată de ω_0 dat prin relația (2.31), dacă $\omega_0 L \gg r$.

E. STUDIUL CIRCUITELOR ÎN REGIM SINUSOIDAL CU AJUTORUL MĂRIMILOR COMPLEXE

1. Proprietăți ale numerelor complexe

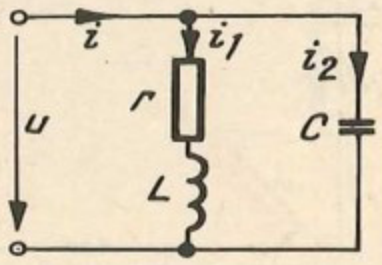


Fig. 2.41

• **Numere complexe.** Numărul $\sqrt{-4} = 2j$, unde $j = \sqrt{-1}$, este un *număr imaginar.*

○ **Observație.** Am notat unitatea imaginară $\sqrt{-1}$ cu j, pentru a evita confuzii cu simbolul i al curentului.

Orice **număr complex** $\underline{c}$ este *o sumă dintre un număr real şi un număr imaginar:*

$$\underline{c} = a + jb \quad . \tag{2.39}$$

Numărul a se numeşte *partea reală* a numărului complex $\underline{c}$; jb se numeşte *partea imaginară* a lui $\underline{c}$. Prescurtat se scrie:

$$a = \mathrm{Re}\{\underline{c}\}, \quad b = \mathrm{Im}\{\underline{c}\}. \tag{2.40}$$

Pentru a preciza că o mărime este complexă folosim sublinierea (de exemplu $\underline{c}$).

În orice ecuaţie cu numere complexe, partea reală a membrului drept al ecuaţiei este egală cu partea reală a membrului stîng şi partea imaginară a membrului drept este egală cu partea imaginară a membrului stîng.

• **Reprezentarea numerelor complexe în planul complex şi scrierea trigonometrică a acestora.** În acest plan, axa absciselor se numeşte *axă reală* şi se indică, de obicei, prin simbolul $+1$ al unităţii reale. Axa ordonatelor se numeşte *axa imaginară* şi se notează cu $+j$.

Numerele complexe se reprezintă în planul complex prin puncte. În figura 2.42 numărul complex $\underline{c}$ este reprezentat prin punctul C, numit *afixul* lui $\underline{c}$. Abscisa lui C este partea reală a lui $\underline{c}$; ordonata lui C este partea imaginară.

○ **Observaţie.** Prin corespondenţa dintre numerele complexe şi punctele planului complex *se asociază biunivoc fiecărui număr complex* $\underline{c}$ *un vector liber în plan:* $\overrightarrow{OC}$. Se obişnuieşte ca numărul complex $\underline{c}$, afixul C şi vectorul $\overrightarrow{OC}$ să se simbolizeze şi să se noteze la fel: $\underline{c}$. Deoarece $OA = a$, $OB = b$, rezultă $OC = \sqrt{a^2 + b^2}$ şi $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{b}{a}$ Numărul real şi pozitiv

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{2.41}$$

se numeşte *modulul numărului complex* $\underline{c}$ şi se notează $|\underline{c}|$.

Numărul real

$$\alpha = \mathrm{arc\,tg}\, b/a \leqslant 0 \tag{2.42}$$

se numeşte *argumentul numărului complex* $\underline{c}$ şi se notează $\arg\{\underline{c}\}$.

Numărul complex $\underline{c}$ se poate scrie sub formă exponenţială şi respectiv trigonometrică:

$$\underline{c} = re^{j\alpha} = r\cos\alpha + jr\sin\alpha \tag{2.43}$$

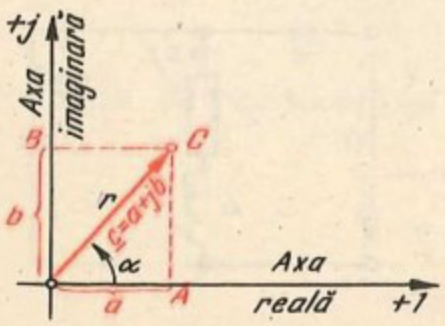


Fig. 2.42

Forma trigonometrică rezultă direct, deoarece în triunghiul dreptunghic AOC catetele sînt:

$$a = r\cos\alpha; \quad b = r\sin\alpha. \tag{2.44}$$

Forma exponențială este mai greu de obținut. Nu vom include aici o demonstrație, dar vom reține identitatea

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha, \tag{2.45}$$

pe baza căreia putem face ușor trecerea de la o formă la alta.

• **Operații cu numere complexe.** Să considerăm două numere complexe $\underline{c}_1$ și $\underline{c}_2$. Numerele complexe *se adună sau se scad* adunînd, respectiv scăzînd, părțile reale separat și părțile imaginare separat:

$$\underline{c}_1 \pm \underline{c}_2 = (a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2). \tag{2.46}$$

Forma exponențială ne permite efectuarea înmulțirii și împărțirii a două numere complexe operînd numai cu modulele și argumentele. Astfel, numerele complexe *se înmulțesc* înmulțind modulele și adunînd argumentele:

$$\underline{c}_1\underline{c}_2 = (r_1e^{j\alpha_1})(r_2e^{j\alpha_2}) = r_1r_2e^{j(\alpha_1+\alpha_2)}. \tag{2.47}$$

Numerele complexe *se împart* împărțind modulele și scăzînd argumentele:

$$\frac{\underline{c}_1}{\underline{c}_2} = \frac{r_1e^{j\alpha_1}}{r_2e^{j\alpha_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{j(\alpha_1-\alpha_2)}. \tag{2.48}$$

• Numărul complex $\underline{c}^* = a - jb = re^{-j\alpha}$ se numește **conjugatul numărului complex** $c = a + jb = re^{+j\alpha}$. Se observă că

$$\underline{c}\,\underline{c}^* = re^{+j\alpha}re^{-j\alpha} = r^2 = a^2 + b^2.$$

Aplicația 1. *Să se pună numărul complex* $\underline{a} = 10\,e^{j\pi/4}$ *sub formă trigonometrică.*

Deoarece $\cos\frac{\pi}{4} = \cos 45° = 0{,}707$ și $\sin\frac{\pi}{4} = \sin 45° = 0{,}707$, rezultă:

$$10\,e^{j\pi/4} = 10\cos 45° + j\,10\sin 45° = 7{,}07 + j\,7{,}07.$$

Acest număr complex este reprezentat în figura 2.43.

Aplicația 2. *Să se exprime* $2 + j5$ *în formă exponențială.*

$$r = \sqrt{2^2 + 5^2} = 5{,}37;$$

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{5}{2} = 68{,}2° = 1{,}19 \text{ radiani.}$$

Prin urmare $2 + j5 = 5{,}37\,e^{j1{,}19}$ (fig. 2.44).

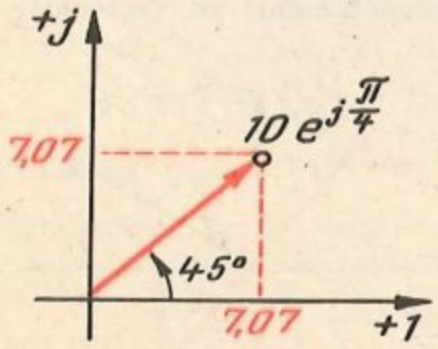


Fig. 2.43

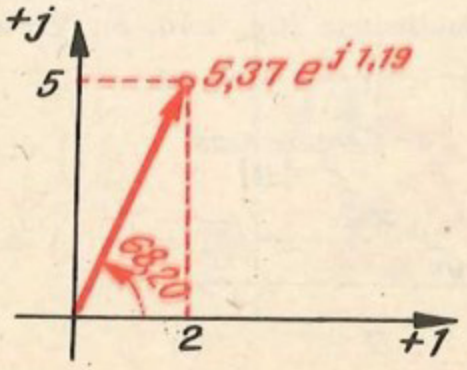


Fig. 2.44

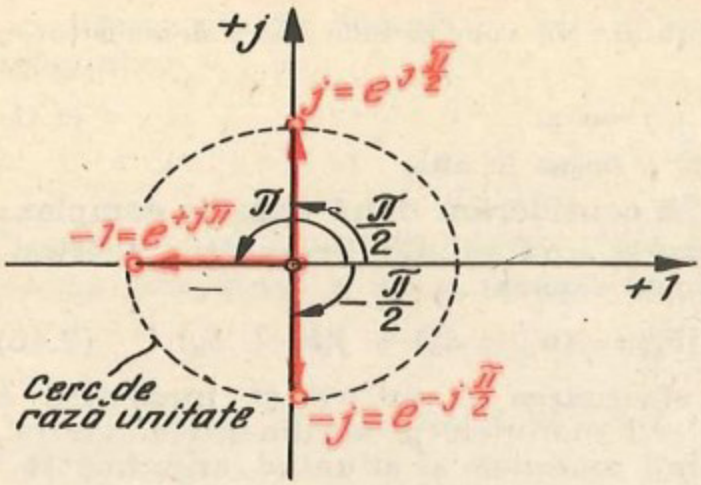


Fig. 2.45

Aplicaţia 3. *Să se arate că*

$$e^{j\pi/2} = j;\ e^{-j\pi/2} = -j;\ e^{\pm j\pi} = -1.$$

Aplicînd succesiv formula (2.45) obţinem

$$e^{j\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = +j;$$

$$e^{-j\pi/2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -j;$$

$$e^{\pm j\pi} = \cos(\pm\pi) + j\sin(\pm\pi) = -1.$$

Reprezentarea în planul complex a acestor numere este indicată în figura 2.45.

Aplicaţia 4. *Numărul complex $\underline{c}$ se înmulţeşte cu factorul real a. Să se arate că această operaţie înseamnă amplificarea vectorului reprezentativ cu factorul real a.*

Utilizînd forma exponenţială a lui $\underline{c}$ obţinem

$$a\underline{c} = ar\ e^{j\alpha},$$

ceea ce înseamnă că numai modulul este multiplicat cu factorul real. Vectorii $\underline{c}$ şi $a\underline{c}$ sînt coliniari.

Aplicaţia 5. *Numărul complex $\underline{c}$ se înmulţeşte cu factorul complex $e^{j\theta}$ de modul unitar. Să se arate că aceasta înseamnă rotirea vectorului $\underline{c}$ cu unghiul θ şi să se particularizeze pentru $\theta = \pi/2$ şi $\theta = -\pi/2$ (b).*

a) Apelînd ca şi în aplicaţia 4 la forma exponenţială, obţinem

$$\underline{c}e^{j\theta} = \underline{c}e^{j\alpha}e^{j\theta} = \underline{c}e^{j(\alpha+\theta)}.$$

Vectorul rezultant are modul c, dar argumentul a crescut cu unghiul θ; vectorul s-a rotit deci, în sens direct, cu unghiul θ (fig. 2.46, *a*).

b) Înmulţirea lui $\underline{c}$ cu $j = e^{j\pi/2}$ înseamnă rotirea lui $\underline{c}$ cu $\pi/2$ în sens direct, iar înmulţirea cu $-j = 1/j$ (adică împărţirea cu j) înseamnă rotirea lui $\underline{c}$ cu $\pi/2$ în sens invers trigonometric (fig. 2.46, *b*). Vectorii $\pm j\underline{c}$ sînt perpendiculari pe vectorul $\underline{c}$.

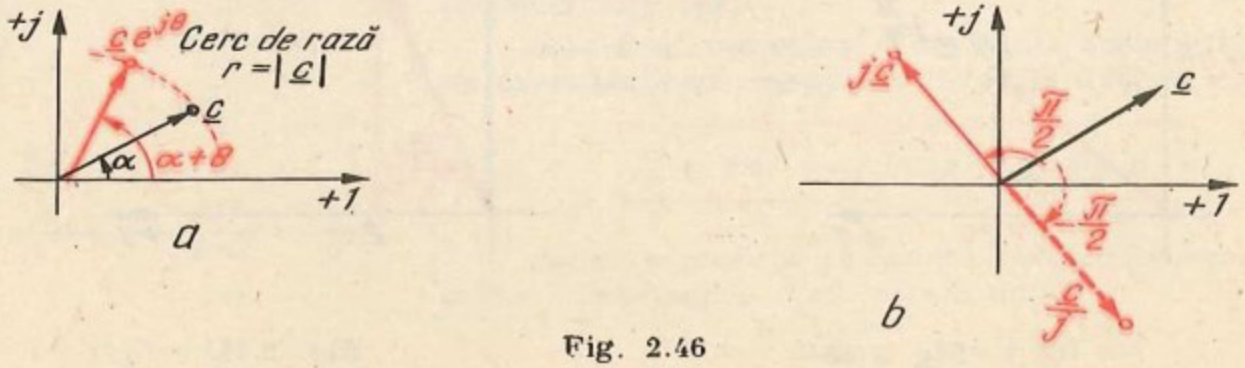


Fig. 2.46

2. Reprezentarea în complex a mărimilor sinusoidale. Fazori

În reprezentarea vectorială *se foloseşte proprietatea funcţiilor sinusoidale de a putea fi puse în corespondenţă cu vectorii liberi din plan.*

Din algebra numerelor complexe ştim că oricărui număr complex îi corespunde în mod biunivoc un punct în planul complex şi deci îi corespunde şi vectorul de poziţie al acestuia. Identificînd planul vectorilor liberi cu planul complex, putem stabili o corespondenţă biunivocă între mulţimea funcţiilor sinusoidale de timp şi mulţimea numerelor complexe. Ajungem astfel la o reprezentare analitică a funcţiilor sinusoidale, denumită *reprezentarea în planul complex:*

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) \rightarrow I : I\angle\gamma \rightarrow \underline{I} = \underline{I}e^{j\gamma}.$$

În reprezentarea în complex, unei mărimi sinusoidale $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma)$ *i se asociază numărul complex* $\underline{I}$, *al cărui modul este egal cu valoarea efectivă şi al cărui argument este egal cu faza iniţială.* Scriem prescurtat această corespondenţă biunivocă sub forma

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) \rightleftarrows \underline{I} = Ie^{j\gamma} \tag{2.49}$$

Mărimea $\underline{I}$, reprezentare în complex a mărimii sinusoidale i, se numeşte *fazorul* $\underline{I}$.

Trecerea de la o mărime sinusoidală la fazorul asociat şi, reciproc, de la fazor la mărimea sinusoidală, se realizează aplicînd direct relaţia (2.49).

Ca şi reprezentarea vectorială, reprezentarea în complex se bazează pe observaţia că mărimile sinusoidale dintr-un circuit electric avînd toate aceeaşi frecvenţă, pot diferi între ele numai prin valoarea efectivă şi faza iniţială şi deci sînt complet caracterizate prin perechi de numere reale (I, γ). Numerele complexe fiind de asemenea complet caracterizate prin perechi de numere reale, pot fi puse în corespondenţă cu mărimile sinusoidale.

Aplicaţia 1. *Să se determine fazorul curentului:*

$$i = 2\sqrt{2}\sin(314t - \pi/3)\ [\mathrm{A}]$$

şi să se reprezinte în planul complex.

În reprezentarea în complex, curentului i se asociază fazorul

$$\underline{I} = 2\,e^{j(-\pi/3)} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = 1 - j\sqrt{3},$$

reprezentat în figura 2.47.

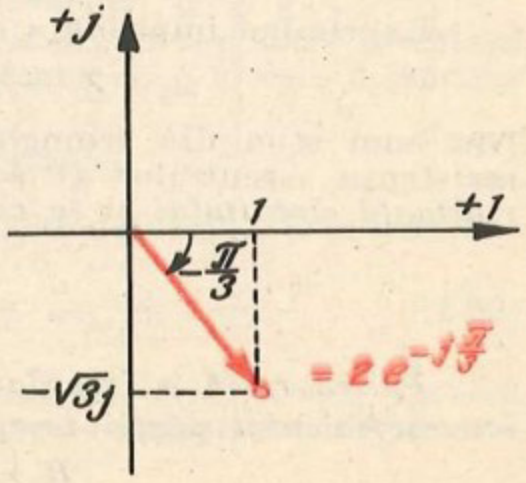


Fig. 2.47

Aplicaţia 2. *Să se scrie expresia instantanee a curentului al cărui fazor este*

$$\underline{I} = -3 + 4j\ [\mathrm{A}].$$

Deoarece:

$$\mathrm{Re}(\underline{I}) = -3;\quad \mathrm{Im}(\underline{I}) = 4,$$

modulul şi argumentul sînt:

$$I = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ A}; \quad \gamma = \arg(\underline{I}) = \frac{\pi}{2} + \text{arc tg}\,\frac{3}{4} = 143{,}12°.$$

Putem deci scrie:

$$i = 5\sqrt{2}\,\sin\,(\omega t + 143°{,}12)\ \text{A}.$$

3. Caracterizarea în complex a circuitelor dipolare

Un circuit dipolar, liniar şi pasiv, sub tensiunea sinusoidală la borne $u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta)$, absoarbe curentul sinusoidal $i = I\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \gamma)$.

Fazorii tensiune la borne şi curent sînt

$$u \rightleftarrows \underline{U} = Ue^{j\beta}; \quad i \rightleftarrows \underline{I} = Ie^{j\gamma}.$$

• Se numeşte **impedanţă complexă a circuitului** *raportul dintre fazorul tensiune la borne şi fazorul curent absorbit:*

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}} \qquad (2.50)$$

Impedanţa complexă este un număr complex. Se notează cu simbolul $\underline{Z}$.

Înlocuind expresiile lui $\underline{U}$ şi $\underline{I}$ obţinem

$$\underline{Z} = \frac{Ue^{j\beta}}{Ie^{j\gamma}} = \frac{U}{I}\,e^{j(\beta - \gamma)} = Ze^{j\varphi},$$

deoarece $U/I = Z$ este impedanţa (scalară), iar $\beta - \gamma = \varphi$ este defazajul dintre tensiune şi curent.

Impedanţa complexă are modulul egal cu impedanţa circuitului şi argumentul egal cu defazajul circuitului:

$$|\underline{Z}| = Z; \quad \varphi = \arg(\underline{Z}).$$

Exprimînd impedanţa complexă în formă trigonometrică, obţinem

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = Z\cos\varphi + jZ\sin\varphi.$$

Aşa cum ştim din triunghiul impedanţelor, mărimea $Z\cos\varphi$ se numeşte rezistenţa circuitului şi se notează cu R. Mărimea $Z\sin\varphi$ se numeşte *reactanţa circuitului* şi se notează cu X. Putem scrie deci

$$\boxed{\underline{Z} = R + jX} \qquad (2.51)$$

Partea reală a impedanţei complexe este egală cu rezistenţa circuitului, iar coeficientul părţii imaginare este egal cu reactanţa circuitului:

$$R = \text{Re}\{\underline{Z}\}; \quad X = \text{Im}\{\underline{Z}\}.$$

Deoarece Z şi φ caracterizează complet un circuit dipolar, impedanţa complexă descrie de asemenea complet circuitul.

○ **Observaţie importantă.** *Impedanţa complexă nu depinde de* $\underline{U}$ *şi* $\underline{I}$, *ci numai de parametrii elementelor de circuit şi de frecvenţă.*

• Se numeşte **admitanţă complexă** *raportul dintre fazorul curent şi fazorul tensiune aplicată:*

$$\boxed{\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}} = \frac{Ie^{j\gamma}}{Ue^{j\beta}} = Ye^{-j\varphi}. \qquad (2.52)$$

Admitanţa complexă are modulul egal cu admitanţa $Y = I/U$ *a circuitului şi argumentul egal cu defazajul cu semn schimbat.* Exprimînd admitanţa complexă sub formă trigonometrică, obţinem:

$$\boxed{\underline{Y} = G + jB} = Y\cos\varphi - jY\sin\varphi.$$

Mărimea $G = Y\cos\varphi$ se numeşte *conductanţa* circuitului.
Mărimea $B = -Y\sin\varphi$ se numeşte *susceptanţa* circuitului.

Aplicaţie. *Un circuit pasiv dipolar sub tensiunea* $u = 24\sqrt{2}\sin\omega t$ *absoarbe curentul sinusoidal* $i = 2\sqrt{2}\sin(\omega t - \pi/3)$. *Să se calculeze:*

a) *impedanţa complexă şi admitanţa complexă;*

b) *rezistenţa şi reactanţa circuitului.*

a) Deoarece $\underline{U} = 24$ şi $\underline{I} = 2e^{-j\pi/3}$, rezultă

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{24}{2e^{-j\pi/3}} = 12e^{j\pi/3}; \quad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{12e^{j\pi/3}} = \frac{1}{12}e^{-j\pi/3}.$$

b) $\underline{Z} = 12\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right) = 6 + j\,10{,}39.$

Deci $R = 6\,\Omega$ şi $X = 10{,}39\,\Omega$.

4. Puterea aparentă complexă

Puterile activă, reactivă şi aparentă se pot calcula direct din soluţia în complex a circuitului, cu ajutorul expresiilor fazorilor $\underline{U}$ şi $\underline{I}$.

Se numeşte **putere aparentă complexă** *produsul dintre tensiunea complexă şi valoarea conjugată a curentului complex.* Se notează cu $\underline{S}$ şi este o mărime complexă. Avem

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = Ue^{j\beta}Ue^{-j\gamma} = UI^{j(\beta-\gamma)}.$$

Dar $UI = S$ este puterea aparentă şi $\beta - \gamma = \varphi$ este defazajul. Prin urmare:

$$\boxed{\underline{S} = Se^{j\varphi}} = S\cos\varphi + jS\sin\varphi = \boxed{P + jQ} \qquad (2.53)$$

Dacă s-a calculat puterea aparentă complexă, atunci modulul ei este puterea aparentă, partea reală este puterea activă şi partea imaginară este puterea reactivă:

$$S = |\underline{S}|,$$
$$P = Re\{\underline{S}\}; \quad Q = Im\{\underline{S}\}$$

Aplicaţie. *Să se calculeze: (a) puterea aparentă complexă pentru circuitul pasiv care, sub tensiunea* $u = 120\sqrt{2}\sin \omega t$, *absoarbe curentul* $i = 2{,}5\sqrt{2}\sin(\omega t - 30°)$, *şi apoi să se determine puterile activă, reactivă şi aparentă (b).*

a) $\underline{U} = 120$; $\underline{I} = 2{,}5\ e^{-j\pi/6}$;

$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = 120 \times 2{,}5\ e^{+j\pi/6} = 300\ e^{j\pi/6} = 259{,}8 + j\ 150.$

b) $S = 300$ VA;

$P = \text{Re}\ \{\underline{S}\} = 259{,}8$ W; $Q = \text{Im}\ \{\underline{S}\} = 150$ var.

5. Elemente pasive ideale de circuit studiate cu fazori

• **Rezistorul ideal,** de rezistenţă r, absoarbe un curent sinusoidal în fază cu tensiunea sinusoidală aplicată la borne. Deci

$$u = U\sqrt{2}\sin \omega t \rightleftarrows \underline{U} = U; \tag{2.54}$$

$$i = I\sqrt{2}\sin \omega t \rightleftarrows \underline{I} = I. \tag{2.55}$$

Relaţia între fazorii tensiune şi curent este

$$\boxed{\underline{U} = r\underline{I}} \tag{2.56}$$

şi se reprezintă ca în diagrama din figura 2.48, *a*.

Impedanţa complexă a rezistorului este

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \boxed{\underline{Z} = r} \tag{2.57}$$

Apelînd la semnificaţia impedanţei complexe (*v.* subcap. E. 3), rezultă

$$Z = r;\ \varphi = 0;\ R = r;\ X = 0. \tag{2.58}$$

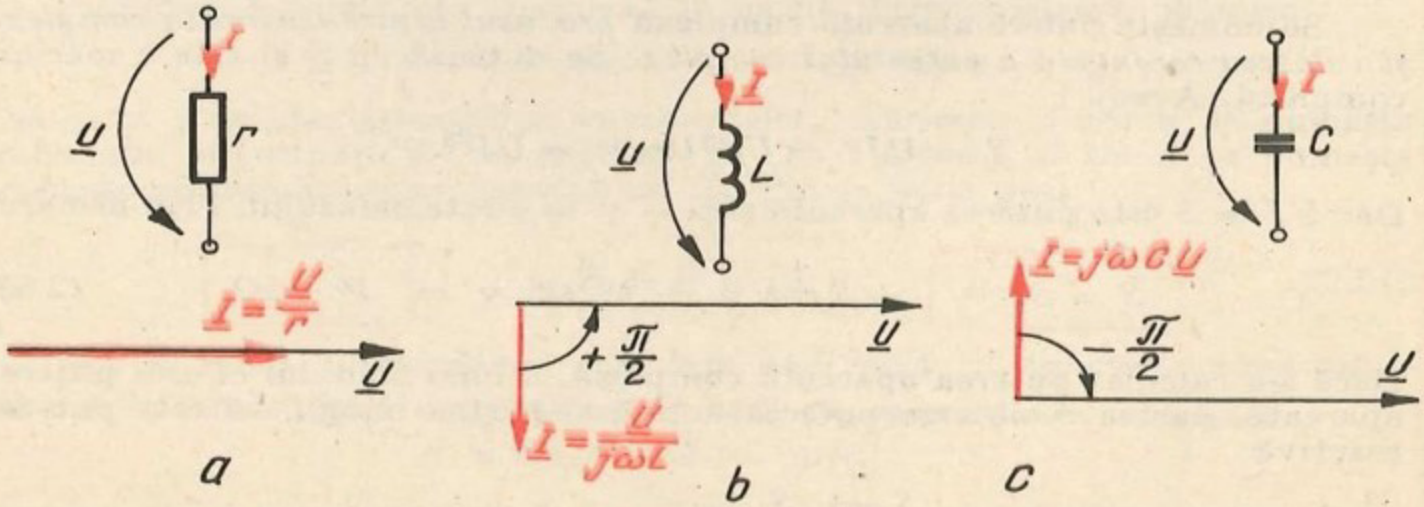


Fig. 2.48

○ **Observaţie.** Am obţinut aceleaşi rezultate ca cele obţinute anterior la studiul elementelor ideale de circuit în regim sinusoidal (v. subcap. C.1).

Puterea complexă, definită în subcap. E.4, are expresia

$$\underline{U}\,\underline{I}^* = \underline{S} = r\ \underline{I}\ \underline{I}^* = rI^2,$$

deoarece $\underline{I}\,\underline{I}^* = I^2$ (v. subcap. E.1). Dar $\underline{S} = P + \mathrm{j}Q$ şi deci

$$P = rI^2 = U^2/r; \quad Q = 0,$$

(v. şi subcap. C.1).

• **Bobina ideală,** de inductivitate L, sub tensiunea sinusoidală la borne $u = U\sqrt{2}\sin\omega t$ absoarbe curentul $i = (U/\omega L)\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$, (v. subcap. C. 12) defazat în urma tensiunii cu $\pi/2$. Deoarece fazorul curent este

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\omega L}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2} = \frac{\underline{U}}{\mathrm{j}\omega L}, \tag{2.59}$$

rezultă

$$\boxed{\underline{U} = \mathrm{j}\omega L\underline{I}}. \tag{2.60}$$

Fazorul curent prin bobina ideală este reprezentat în figura 2,48, *o*, cu $\frac{\pi}{2}$ în urma lui $\underline{U}$.

Impedanţa complexă a bobinei ideale este

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \boxed{\underline{Z} = \mathrm{j}\omega L}. \tag{2.61}$$

○ **Observaţie.** Regăsim astfel rezultatele obţinute anterior (v. subcap. D.1):

$$Z = \omega L, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad R = 0, \quad X = \omega L > 0. \tag{2.62}$$

Puterea aparentă complexă fiind

$$\underline{U}\,\underline{I} = \underline{S} = j\omega L\underline{I}^*\underline{I} = \mathrm{j}\omega L\, I^2, \tag{2.63}$$

rezultă:

$$P = 0; \quad Q = \omega LI^2 = U^2/\omega L > 0 \tag{2.64}$$

(v. subcap. C.2).

• **Condensatorul ideal** avînd capacitatea C, sub tensiunea $u = U\sqrt{2}\sin\omega t$ la borne, absoarbe curentul $i = \omega CU\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/2)$ (v. subcap. C.3) al cărui fazor este

$$\underline{I} = \omega CUe^{\mathrm{j}\pi/2} \rightarrow \boxed{\underline{I} = \mathrm{j}\omega C\underline{U}}$$

Fazorul curent $\underline{I}$ prin condensator apare în diagrama fazorială din figura 2.48, *c* înaintea fazorului tensiune $\underline{U}$ cu unghiul $\pi/2$.

Impedanța complexă a condensatorului ideal este

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \boxed{\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}} = -j\frac{1}{\omega C}. \qquad (2.65)$$

Rezultă:

$$Z = \frac{1}{\omega C}; \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}; \quad R = 0; \quad X = -\frac{1}{\omega C} < 0.$$

Puterea complexă este

$$\underline{U}\,\underline{I}^* = \underline{S} = \frac{I^2}{j\omega C}.$$

Rezultă atunci

$$P = 0; \quad Q = XI^2 = -I^2/\omega C = -\omega C U^2 < 0.$$

Regăsim astfel rezultatele obținute anterior (v. subcap. C.3).

○ **Concluzii.** 1) Pentru elementele de circuit ideale dipolare și pasive, relația tensiune-curent este de forma:

$$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}.$$

Relația aceasta este cunoscută sub numele de legea lui Ohm, datorită asemănării formale cu relația $U = RI$ cunoscută din studiul curentului continuu.

2) Pentru cele trei elemente ideale de circuit, impedanța complexă este:

$$\underline{Z} = r; \quad \underline{Z} = j\omega L; \quad \underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}.$$

6. Circuite simple studiate cu fazori

Să aplicăm metoda reprezentării în complex la circuitele R, L serie și R, L, C serie studiate anterior cu metoda reprezentării vectoriale (v. subcap. D.3 și D.5).

• Pentru **circuitul R, L serie** (fig. 2.49, *a*) se poate scrie

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L; \quad \underline{U}_R = R\underline{I}; \quad \underline{U}_L = j\omega L\underline{I}.$$

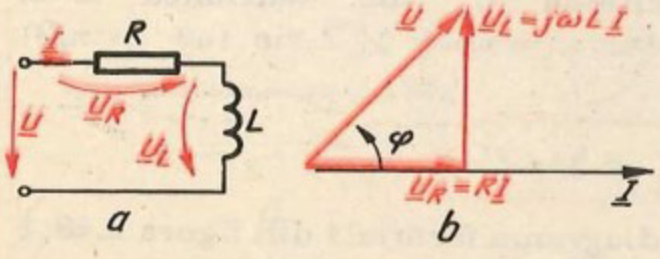


Fig. 2.49

Înlocuind, obținem

$$\underline{U} = (R + j\omega L)\underline{I},$$

de unde rezultă impedanța complexă a circuitului

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \boxed{\underline{Z} = R + j\omega L.} \qquad (2.66)$$

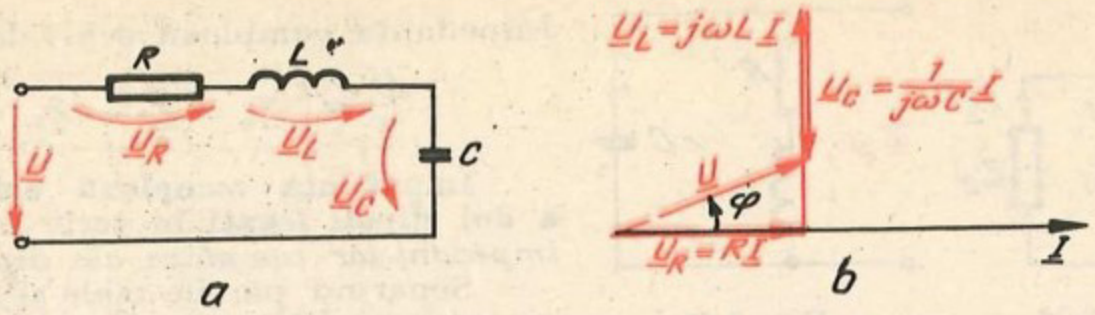


Fig. 2.50

Odată obținută expresia impedanței complexe, putem calcula modulul și argumentul:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}; \quad \varphi = \text{arc tg}\,\frac{\omega L}{R}.$$

Diagrama fazorială este indicată în figura 2.49, *b*.

• **Pentru circuitul *R*, *L*, *C* serie** (fig. 2.50, *a*), procedînd similar ca mai sus, obținem relațiile între fazori:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C; \quad \underline{U}_R = R\underline{I}; \quad \underline{U}_L = j\omega L\underline{I}; \quad \underline{U}_C = \frac{I}{j\omega C}\underline{I},$$

din care deducem impedanța complexă a circuitului

$$\underline{U} = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\underline{I} \rightarrow \boxed{\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).} \qquad (2.67)$$

Modulul impedanței complexe este impedanța circuitului, iar argumentul impedanței complexe este defazajul circuitului. Obținem astfel direct expresiile lui Z și φ deduse în subcap. D.5.

Diagrama fazorială este reprezentantă din figura 2.50, *b*.

Constatăm astfel că, determinînd mai întîi impedanța complexă a circuitului, putem obține apoi relativ simplu impedanța și defazajul circuitului. Studiul circuitelor urmează în continuare aceeași cale ca la metoda reprezentării vectoriale.

7. Conexiunile impedanțelor

• **Doi dipoli pasivi** necuplați inductiv între ei, avînd impedanțele complexe $\underline{Z}_1$ și $\underline{Z}_2$, **legați în serie**, sînt străbătuți de același curent (fig. 2.51).

Tensiunea complexă la borne este

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2.$$

Dar:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1\underline{I} \quad \text{și} \quad \underline{U}_2 = \underline{Z}_2\underline{I}.$$

Prin urmare

$$\underline{U} = \underline{Z}_1\underline{I} + \underline{Z}_2\underline{I} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\underline{I}.$$

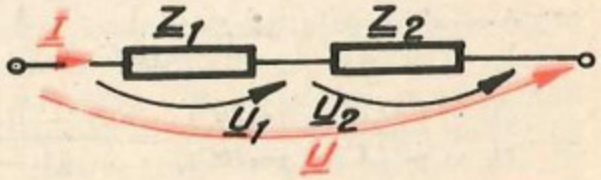


Fig. 2.51

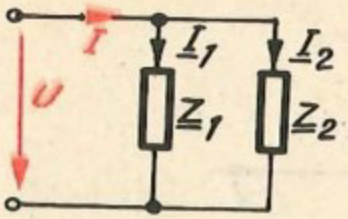


Fig. 2.52

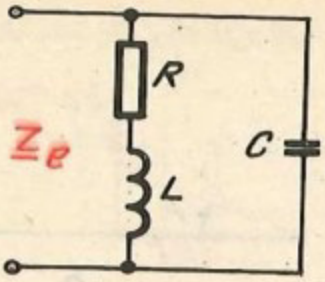


Fig. 2.53

Impedanța complexă echivalentă este

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \boxed{\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2.} \qquad (2.68)$$

Impedanța complexă echivalentă a doi dipoli legați în serie *este suma impedanțelor complexe ale dipolilor.*

Separînd părțile reale și cele imaginare, se obțin următoarele relații:

$$R_e + \mathrm{j}X_e = R_1 + \mathrm{j}X_1 + R_2 + \mathrm{j}X_2 = (R_1 + R_2) + \mathrm{j}(X_1 + X_2);$$

$$R_e = R_1 + R_2; \quad X_e = X_1 + X_2.$$

Prin urmare, la dipoli în serie *rezistența echivalentă este suma rezistențelor dipolilor; reactanța echivalentă este suma reactanțelor dipolilor.*

• **Doi dipoli pasivi** necuplați inductiv între ei, **legați în paralel** (fig. 2.52) au aceeași tensiune la borne. Obținem

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \underline{U}\left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}\right) = \underline{U}(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2).$$

Admitanța complexă echivalentă este

$$\frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \boxed{\underline{Y}_e = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2.} \qquad (2.69)$$

Înlocuind admitanțele prin impedanțe, obținem

$$\frac{1}{\underline{Z}_e} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \rightarrow \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \underline{Z}_e.$$

Separînd părțile reale și imaginare obținem

$$G_e = G_1 + G_2; \quad B_e = B_1 + B_2.$$

Doi dipoli în paralel au **admitanța complexă echivalentă** *egală cu suma admitanțelor complexe ale dipolilor*, **conductanța echivalentă** — *egală cu suma conductanțelor lor*, iar **susceptanța echivalentă** — *egală cu suma susceptanțelor* lor.

Aplicație. ***Să se determine impedanța complexă echivalentă a circuitului R, L, C paralel din figura 2.53.***

Deoarece $\underline{Z}_1 = R + \mathrm{j}\omega L$ și $\underline{Z}_2 = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}$, rezultă

$$\underline{Z}_e = \frac{(R + \mathrm{j}\omega L)\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \mathrm{j}\omega L + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{R + \mathrm{j}\omega L}{1 - \omega^2 LC + \mathrm{j}\omega RC} = \frac{R + \mathrm{j}\omega L}{(1 - \omega^2 LC + \mathrm{j}\omega RC)} \cdot$$

$$\cdot \frac{(1 - \omega^2 LC - \mathrm{j}\omega RC)}{(1 - \omega^2 LC - \mathrm{j}\omega RC)} = \frac{R + \mathrm{j}(\omega L - \omega^3 L^2 C - \omega R^2 C)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2} = \frac{R}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2} +$$

$$+ \mathrm{j}\,\frac{\omega(L - R^2 C - \omega^2 L^2 C)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}.$$

Capitolul 3

CIRCUITE TRIFAZATE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

A. GENERAREA SISTEMULUI TRIFAZAT DE TENSIUNI ELECTROMOTOARE

În capitolul 2 s-a arătat că rotind o spiră rigidă cu aria A în jurul unei axe de simetrie, cu viteza unghiulară ω, într-un cîmp magnetic uniform și constant, în spiră se induce o tensiune electromotoare alternativă sinusoidală $e = E\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha)$, cu valoarea efectivă $E = \frac{BA\omega}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ BA\omega$.

Faza acestei t.e.m. este egală cu unghiul (măsurat în radiani) format de sensul de referință al fluxului (un versor $\vec{n}$ perpendicular pe suprafața spirei, cu sensul asociat cu sensul de referință al t.e.m. după regula burghiului) cu sensul inducției magnetice $\vec{B}$.

• **Sistem simetric de tensiuni electromotoare.** Este de înțeles că rotind simultan trei spire identice fixate rigid pe același ax, în spire se induc tensiunile electromotoare:

$$\begin{cases} e_1 = E\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha_{10}); \\ e_2 = E\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha_{20}); \\ e_3 = E\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha_{30}). \end{cases} \tag{3.1}$$

Fazele inițiale ale acestor t.e.m. sînt unghiurile formate de sensurile de referință ale fluxurilor prin suprafețele spirelor, cu inducția magnetică la momentul $t = 0$ (momentul declanșării unui cronometru a cărui indicație curentă este t):

$$\alpha_{i0} = \sphericalangle(\vec{n}_i, \vec{B})|_{t=0},\ i = 1, 2, 3. \tag{3.2}$$

Tensiunile electromotoare care se induc în spire formează un **sistem simetric de funcții sinusoidale de timp** *dacă au aceeași valoare efectivă și sînt egal defazate.* Practic, pentru a mări valoarea efectivă a t.e.m. la inducții magnetice și turații date se utilizează bobine plate cu un număr mare de spire dispuse pe un suport rigid. Valoarea efectivă a t.e.m. induse într-o înfășurare cu N spire este:

$$E = 0{,}707\ BNA\omega. \tag{3.3}$$

În trei înfășurări identice se induc așadar t.e.m. care au valori efective identice.

Așa cum am spus, ele formează un sistem simetric dacă sînt și egal defazate, adică:

$$\alpha_{10} - \alpha_{20} = \alpha_{20} - \alpha_{30} = \alpha_{30} - \alpha_{10} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad.} \tag{3.4}$$

Originea timpului fiind arbitrară, oricare dintre fazele inițiale ale t.e.m. poate fi aleasă nulă. Dacă de exemplu $\alpha_{10} = 0$, din (3.4) rezultă pentru celelalte faze inițiale valorile:

$$\alpha_{20} = -\frac{2\pi}{3} \text{ rad};$$

$$\alpha_{30} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad sau } \alpha_{30} = -\frac{4\pi}{3} \text{ rad.} \tag{3.5}$$

Cu această alegere a originii fazelor, t.e.m. ce formează sistemul simetric sînt:

$$\begin{cases} e_1 = E\sqrt{2}\sin \omega t; \\ e_2 = E\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right); \\ e_3 = E\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \text{ sau } e_3 = E\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right). \end{cases} \tag{3.6}$$

Bobinajele plate în care se induc aceste t.e.m. sînt numite *înfășurări de fază*. Ele sînt egal decalate în spațiu, unghiul între normalele la planele lor fiind egal cu $\frac{2\pi}{3}$ rad. În figura 3.1 se prezintă poziția în spațiu a celor trei înfășurări la momentul $t = 0$.

• **Sistem simetric cu ordinea directă de succesiune a fazelor.** Graficele funcțiilor sinusoidale de timp $e_1(t)$, $e_2(t)$ și $e_3(t)$ date de relația (3.6) sînt prezentate în figura 3.2, unde prin t_{1m}, t_{2m} și t_{3m} se indică momentul la care fiecare dintre tensiunile electromotoare trece prin valoarea maximă. Trecerea prin valoarea maximă este determinată de „trecerea" fiecărei înfășurări printr-o anumită poziție în spațiu. Poziția respectivă este determinată de unghiul format între normala la suprafața bobinajului și inducția magnetică. Tensiunea electromotoare e_1 trece prin valoarea maximă cînd unghiul între normala $\vec{n}_1$ și inducția magnetică devine $\frac{\pi}{2}$ rad. În poziția respectivă liniile inducției magnetice

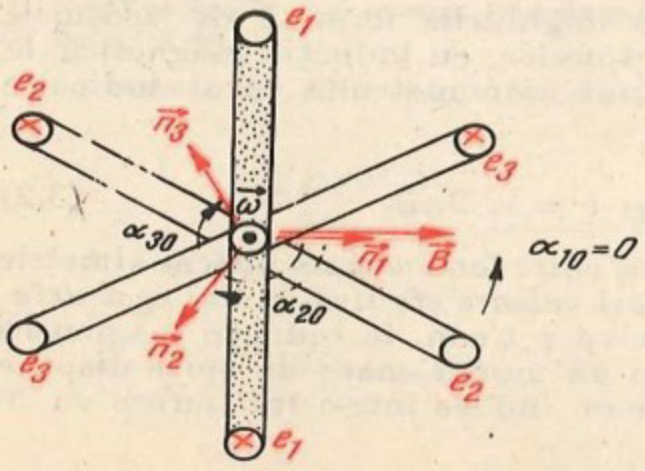
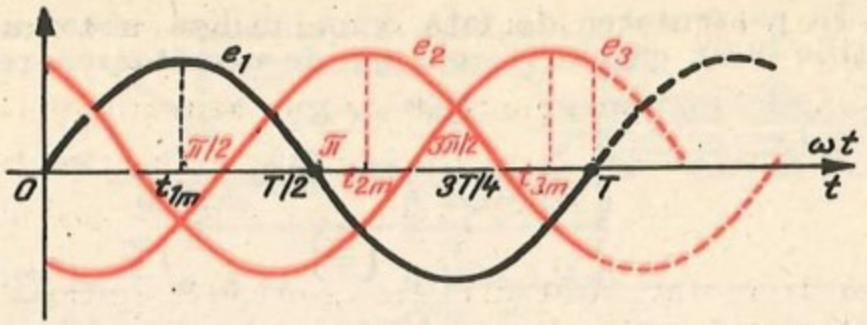


Fig. 3.1

Fig. 3.2



sînt în planul primei înfăşurări. T.e.m. indusă în a doua înfăşurare trece prin valoarea maximă la momentul t_{2m}, la care normala $\vec{n}_2$ ajunge perpendiculară pe inducţia magnetică. Intervalul de timp $t_{2m} - t_{1m}$ se deduce din condiţia ca în acest interval spirele să se rotească cu unghiul de $\frac{2\pi}{3}$ rad. Deci:

$$t_{2m} - t_{1m} = \frac{2\pi/3}{\omega} = \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{T}{3} \quad \text{sau} \quad t_{2m} = t_{1m} + \frac{T}{3}.$$

Cea de-a treia t.e.m. trece prin valoarea maximă la momentul t_{m3}, după ce înfăşurarea respectivă s-a rotit faţă de poziţia în care se afla la $t = 0$ cu unghiul $\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$ rad. Deci:

$$\omega t_{m3} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3} + \omega t_{m1}.$$

De aici obţinem $t_{m3} - t_{m1} = 2 \cdot \frac{T}{3}$, sau $t_{m3} = t_{m1} + 2 \cdot \frac{T}{3}$.

Aşadar, *tensiunile electromotoare trec prin valoarea maximă în ordinea* e_1, e_2, e_3 *la intervale de timp cu durata* $\frac{T}{3}$ *în care înfăşurările se rotesc cu* $2\pi/3$ *rad.*

Sistemul de t.e.m. dat de relaţiile (3.6), ce se obţin rotind înfăşurările în sens trigonometric, este un *sistem simetric cu ordine directă de succesiune a fazelor.*

• Putem obţine un **sistem simetric de t.e.m. cu ordine inversă de succesiune a fazelor** dacă facem ca t.e.m. să treacă prin valoarea maximă în ordinea e_1, e_3, e_2. Pentru aceasta este suficient să se schimbe sensul de rotaţie. Sistemul simetric de t.e.m. cu ordinea inversă de succesiune a fazelor este dat de:

$$\begin{cases} e_1 = E\sqrt{2}\sin \omega t; \\ e_2 = E\ 2 \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right); \\ e_3 = E\ 2 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right). \end{cases} \qquad (3.7)$$

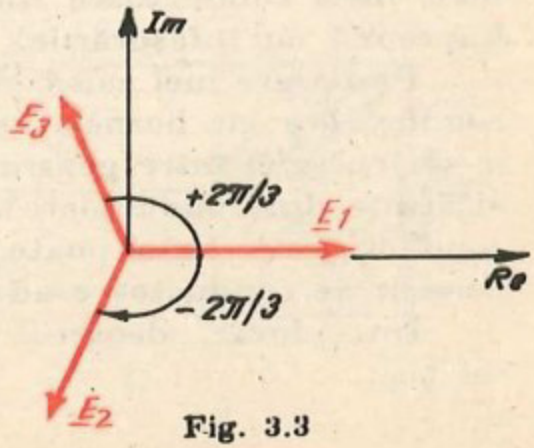


Fig. 3.3

• În prezentarea de față vom utiliza **sistemul cu ordine directă** dat de relațiile (3.6), căruia îi corespunde următoarea **reprezentare fazorială**:

$$\begin{cases} \underline{E}_1 = E e^{j0} = E; \\ \underline{E}_2 = E\ e^{j\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = E\ e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \\ \underline{E}_3 = E\ e^{j\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = E\ e^{j\frac{2\pi}{3}} = \underline{E}_2^*. \end{cases} \tag{3.8}$$

Introducînd notația:

$$\underline{a} = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + j\ \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - j\ \frac{\sqrt{3}}{2},$$

relațiile (3.8) se mai scriu și sub forma:

$$\begin{cases} \underline{E}_1 = E; \\ \underline{E}_2 = \underline{a}E; \\ \underline{E}_3 = \underline{a}^*E. \end{cases} \tag{3.9}$$

Diagrama fazorială din figura 3.3 ne arată că între fazori există relația:

$$\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3 = 0. \tag{3.9}$$

Relația corespunzătoare între valorile instantanee ale t.e.m. este:

$$(\forall)\ t,\ e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

foarte importantă din punctul de vedere al „asamblării" celor trei generatoare monofazate în unul singur, pe care-l denumim *generator trifazat*.

B. CONEXIUNILE GENERATOARELOR ȘI RECEPTOARELOR

1. Conexiunea în triunghi (Δ)

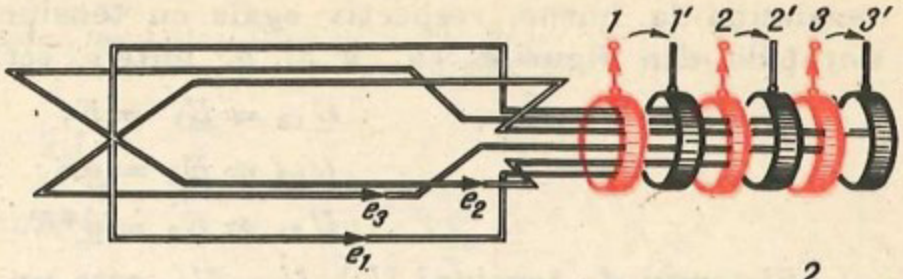
Cele trei generatoare monofazate în înfășurările cărora se induc tensiunile electromotoare $\underline{E}_1$, $\underline{E}_2$ și $\underline{E}_3$ ce formează un sistem simetric se pot conecta cu trei receptoare monofazate cu impedanțele $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ și $\underline{Z}_3$ prin intermediul unor inele conductoare izolate între ele și antrenate în mișcare de rotație împreună cu înfășurările.

Pe fiecare inel calcă cîte o perie colectoare prin care se asigură legături conductoare cu bornele receptoarelor monofazate (fig. 3.4). Pentru transmisia energiei între generatoare și receptoare se utilizează trei linii bifilare alcătuite din conductoare ideale, așa cum se arată în figura 3.5. Numărul conductoarelor liniei poate fi redus de la șase la patru dacă în locul fiecărei perechi de conductoare adiacente se prevede un singur conductor (fig. 3.6).

Într-adevăr, deoarece între t.e.m. ale generatoarelor este adevărată relația:

$$\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3 = 0$$

Fig. 3.4



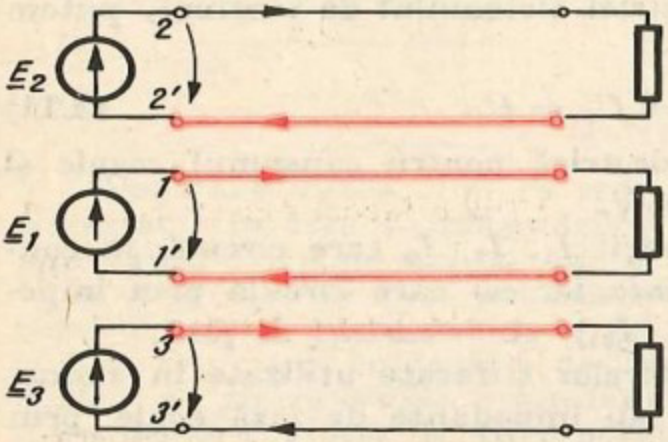


Fig. 3.5

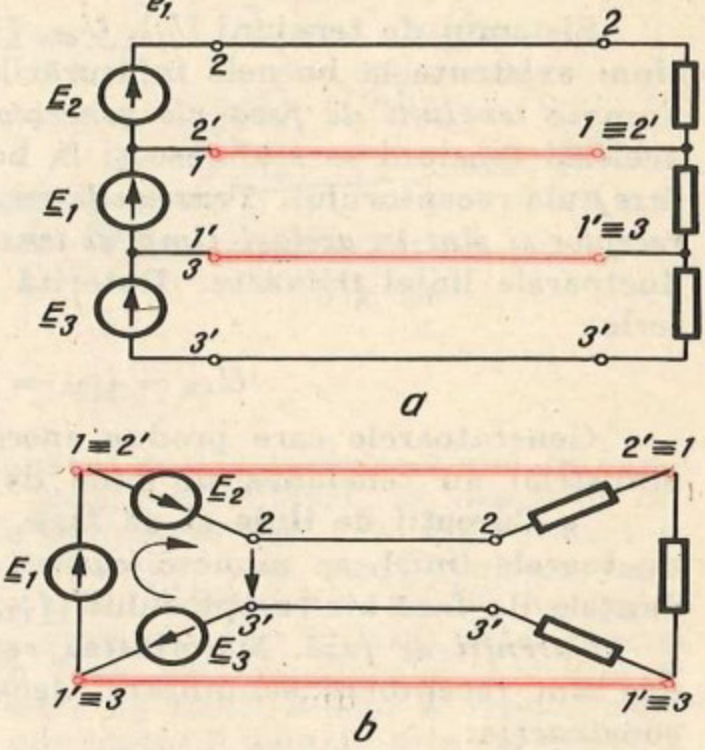


Fig. 33.6

tensiunea între bornele *3'* şi *2* este nulă, aşa cum rezultă din teorema a doua a lui Kirchhoff. Cele două borne pot fi suprapuse fără a modifica regimul de curenţi din circuit. În felul acesta, unul dintre conductoarele liniei legat la bornele *2* sau *3'* se poate înlătura. Ajungem astfel la conexiunea în triunghi atît a înfăşurărilor generatoarelor, cît şi a impedanţelor receptoarelor (fig. 3.7).

• **Tensiunile de fază.** Deoarece înfăşurările de fază ale generatorului trifazat au impedanţe proprii neglijabile, putem reprezenta generatorul prin

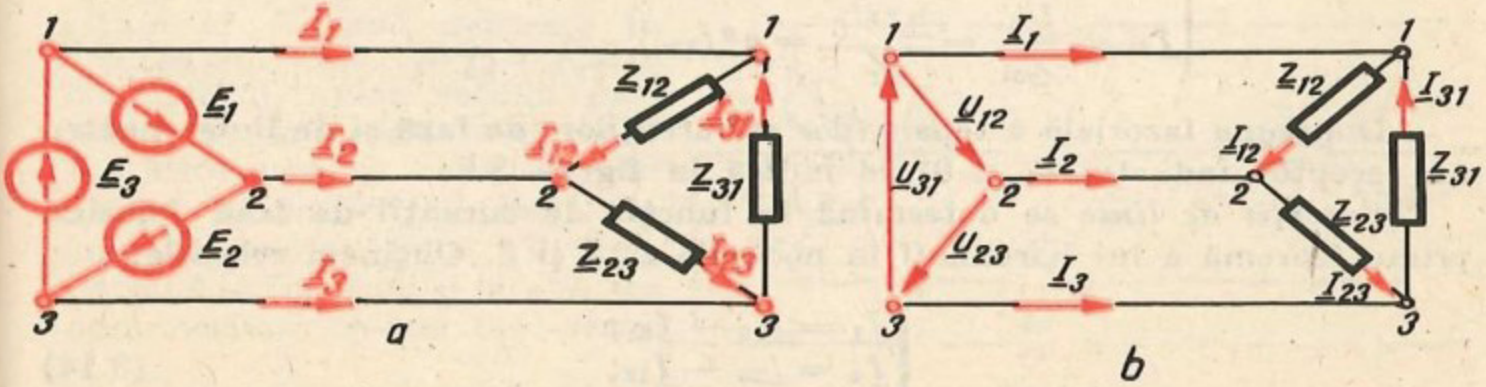


Fig. 3.7

tensiunile la borne, respectiv egale cu tensiunile electromotoare. Urmărind notaţiile din figurile 3.7, *a* şi *b*, putem scrie:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \underline{E}_1 = E; \\ \underline{U}_{23} &= \underline{E}_2 = \underline{a}E; \\ \underline{U}_{31} &= \underline{E}_3 = \underline{a}^* E. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Sistemul de tensiuni $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$ este un sistem simetric. Aceste tensiuni existente la bornele înfăşurărilor de fază ale generatorului trifazat se numesc *tensiuni de fază ale generatorului.* Conductoarele liniei fiind ideale, aceleaşi tensiuni se stabilesc şi la bornele impedanţelor de fază (prescurtat, *faze)* ale receptorului. *Tensiunile respective sînt deci tensiuni de fază şi pentru receptor şi sînt în acelaşi timp şi tensiuni de linie*, fiind tensiuni între conductoarele liniei trifazate. Datorită simetriei sistemului de tensiuni, putem scrie:

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_f = U_l. \tag{3.11}$$

Generatoarele care produc energie electrică pentru consumul casnic şi industrial au tensiunea de linie de 380 V.

• **Curenţii de linie şi de fază.** Curenţii $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ care circulă în conductoarele liniei se numesc *curenţi de linie*, iar cei care circulă prin impedanţele de fază ale receptorului ($\underline{I}_{12}$, $\underline{I}_{23}$, $\underline{I}_{31}$) sînt *curenţi de fază.*

Curenţii de fază. Majoritatea receptoarelor trifazate utilizate în industrie sînt receptoare echilibrate, deoarece au impedanţe de fază egale prin construcţie:

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31} = \underline{Z} = Z\, e^{j\varphi} = Z(\cos\varphi + j \sin\varphi) = R + jX. \tag{3.12}$$

În acest caz, curenţii de fază ai receptorului, care formează un sistem simetric, sînt:

$$\begin{cases} \underline{I}_{12} = \dfrac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} = \dfrac{\underline{U}_f}{\underline{Z}} = \dfrac{U_f}{Z\, e^{j\varphi}} = \dfrac{U_f}{Z} e^{-j\varphi} = I_f e^{-j\varphi}; \\ \underline{I}_{23} = \dfrac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} = \dfrac{\underline{a}U_f}{\underline{Z}} = \underline{a}\underline{I}_{12}; \\ \underline{I}_{31} = \dfrac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}} = \dfrac{\underline{a}^* U_f}{\underline{Z}} = \underline{a}^* \underline{I}_{12}. \end{cases} \tag{3.13}$$

Diagrama fazorială a tensiunilor şi curenţilor (de fază şi de linie) pentru un receptor inductiv ($\varphi > 0$) se indică în figura 3.8.

Curenţii de linie se determină în funcţie de curenţii de fază folosind prima teoremă a lui Kirchhoff în nodurile *1*, *2* şi *3*. Obţinem relaţiile:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}; \\ \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}; \\ \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Curenţii de linie formează şi ei un sistem simetric, avînd valoarea lor efectivă:

$$I_l = 2I_f \cos\frac{\pi}{6} = 2I_f \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\, I_f,$$

aşa cum rezultă din diagrama fazorială.

○ **În concluzie,** pentru conexiunea în triunghi sînt adevărate relaţiile

$$\boxed{U_l = U_f} \qquad (3.15)$$

$$\boxed{I_l = \sqrt{3}\, I_f.}$$

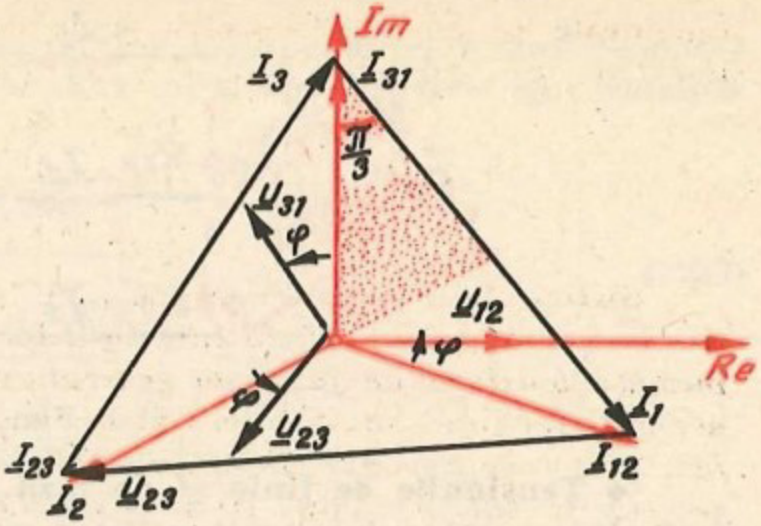


Fig. 3.8

2. Conexiunea în stea (λ)

Pentru a vedea cum se reduce numărul conductoarelor liniei în cazul conexiunii în stea a înfăşurărilor unui generator trifazat, să urmărim din nou figura 3.5. Cele trei conductoare „de întoarcere" ale curenţilor conectate la bornele *1'*, *2'* şi *3'* se pot înlocui cu unul singur prin care circulă curentul total al celor trei conductoare. Se obţine circuitul din figura 3.9. Punctul *O* comun celor trei înfăşurări de fază ale generatorului trifazat este *punctul neutru al generatorului.* Impedanţele de fază ale receptorului prezintă şi ele o bornă comună, *N*, care poartă numele de *punct neutru al receptorului.* Cele două puncte neutre sînt legate prin conductorul neutru, prin care circulă curentul $\underline{I}_0$.

• **Curenţii de linie şi de fază.** Curenţii prin celelalte conductoare ale liniei, denumiţi *curenţi de linie, sînt în acelaşi timp şi curenţi de fază* deoarece circulă şi prin impedanţele de fază ale receptorului. Dacă generatorul trifazat dezvoltă t.e.m. ce alcătuiesc un sistem simetric, iar impedanţele de fază ale receptorului sînt identice, respectiv receptorul este echilibrat, curenţii de fază ai receptorului formează şi ei un sistem simetric de mărimi sinusoidale.

Curentul prin conductorul neutru, dat de prima teoremă a lui Kirchhoff, respectiv:

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3. \qquad (3.16)$$

trebuie să fie nul, deoarece în virtutea simetriei $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$. Conductorul neutru nefiind parcurs de curent, poate fi suprimat (fig. 3.10) fără a modifica prin aceasta valorile potenţialelor punctelor neutre $\underline{V}_0$ şi $\underline{V}_N$, care continuă să fie egale şi în absenţa conductorului. Putem deci scrie:

$$\underline{U}_{N0} = \underline{V}_N - \underline{V}_0 = 0. \qquad (3.17)$$

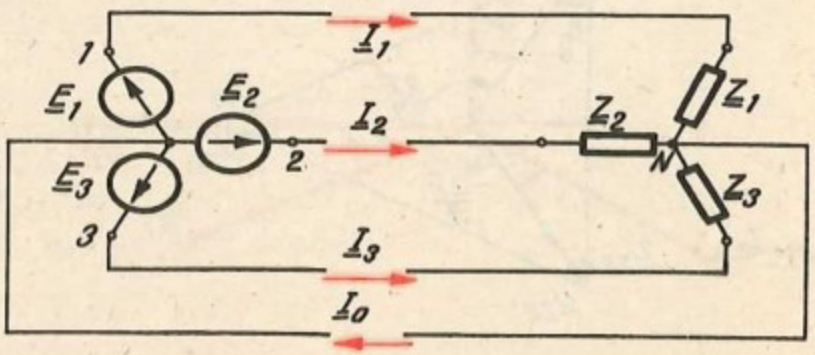


Fig. 3.9

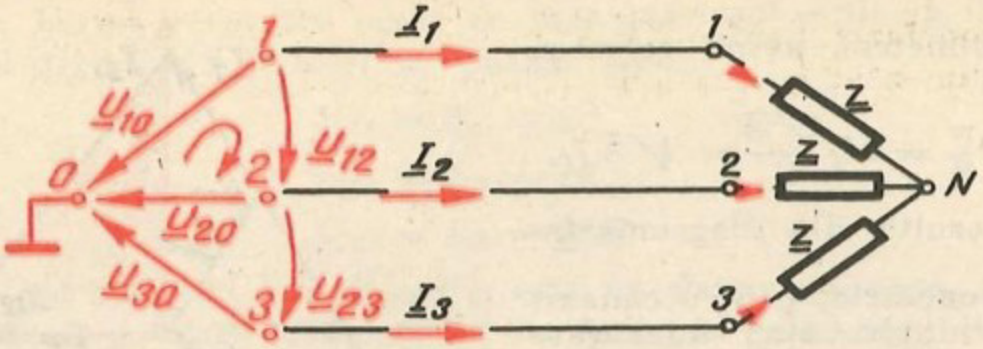


Fig. 3.10

• **Tensiunile de linie şi de fază.** În conexiunea în stea, *tensiunile de fază* ale generatorului, egale cu t.e.m. induse în înfăşurările de fază, continuă să fie egale cu tensiunile de fază ale receptorului, respectiv:

$$\begin{cases} \underline{U}_{10} = \underline{U}_{1N} = \underline{E}_1 = E = U_f; \\ \underline{U}_{20} = \underline{U}_{2N} = \underline{E}_2 = \underline{a}E = \underline{a}U_f; \\ \underline{U}_{30} = \underline{U}_{3N} = \underline{E}_3 = \underline{a}^*E = \underline{a}^*U_f. \end{cases} \tag{3.18}$$

Tensiunile de linie, diferite de data aceasta de cele de fază, se deduc din teorema a doua a lui Kirchhoff. Astfel, pentru conturul închis indicat în figura 3.10 se poate scrie:

$$0 = -\underline{U}_{10} + \underline{U}_{12} + \underline{U}_{20}.$$

Rezultă de aici:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{10} - \underline{U}_{20}. \tag{3.19}$$

Prin permutarea circulară a indicilor rezultă şi celelalte două tensiuni de linie:

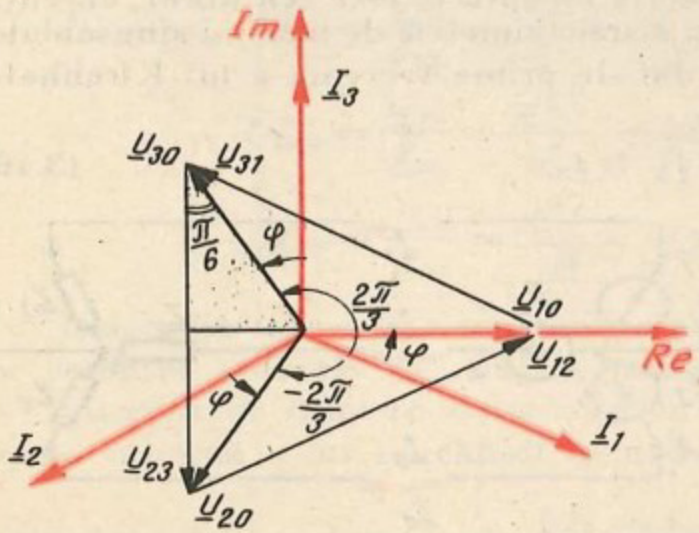


Fig. 3.11

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{20} - \underline{U}_{30};$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_{30} - \underline{U}_{10}.$$

Diagrama fazorială a tensiunilor şi curenţilor pentru un receptor echilibrat, inductiv, se indică în figura 3.11. Din triunghiul haşurat rezultă valoarea efectivă a tensiunii de linie:

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_l =$$

$$= 2U_{30}\cos\frac{\pi}{6} = 2 \times$$

$$\times \frac{\sqrt{3}}{2} U_f = \sqrt{3}\, U_f.$$

o **În concluzie,** pentru conexiunea în stea a impedanţelor unui receptor echilibrat alimentat cu tensiuni ce formează un sistem simetric sînt valabile relaţiile:

$$\boxed{I_l = I_f}$$

$$\boxed{U_l = \sqrt{3}\, U_f} \qquad (3.20)$$

C. PUTERILE ÎN SISTEME TRIFAZATE

1. Conexiunea în triunghi

Puterea aparentă complexă la bornele receptorului trifazat echilibrat alimentat cu tensiuni ce formează un sistem simetric este:

$$\underline{S}_b = \underline{U}_{12}\underline{I}^*_{12} + \underline{U}_{23}\underline{I}^*_{23} + \underline{U}_{31}\underline{I}^*_{31}. \qquad (3.21)$$

Pentru tensiuni de fază (linie) date:

$$\underline{U}_{12} = U_f;\ \underline{U}_{23} = \underline{a}U_f \text{ şi } \underline{U}_{31} = \underline{a}^* U_f$$

şi impedanţe egale, curenţii de fază sînt:

$$\begin{cases} \underline{I}_{12} = \dfrac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = \dfrac{U_f}{\underline{Z}\, e^{j\varphi}} = \dfrac{U_f}{Z} e^{-j\varphi} = I_f e^{-j\varphi}; \\ \underline{I}_{23} = \underline{a}\underline{I}_{12}; \\ \underline{I}_{31} = \underline{a}^*\underline{I}_{12}. \end{cases}$$

Înlocuind în (3.21) şi ţinînd cont de egalitatea $\underline{a}\,\underline{a}^* = |\underline{a}|^2 \doteq 1$, obţinem:

$$\underline{S}_b = U_f I_f\, e^{j\varphi} + \underline{a}U_f \cdot \underline{a}^* I_f\, e^{j\varphi} + U_f \underline{a}^* I_f \underline{a}\, e^{j\varphi} = 3U_f I_f\, e^{j\varphi} =$$
$$= 3U_f I_f \cos\varphi + j\, 3U_f I_f \sin\varphi = P_b + j\, Q_b.$$

De aici rezultă imediat:

$$\boxed{P_b = 3U_f I_f \cos\varphi}$$

$$\boxed{Q_b = 3U_f I_f \sin\varphi}\ ; \qquad (3.22)$$

$$\boxed{S_b = 3U_f I_f}$$

Deoarece $U_f = U_l$ şi $I_f = \frac{I_l}{\sqrt{3}}$, expresiile puterilor se pot scrie şi sub forma:

$$P_b = \sqrt{3}\, U_l I_l \cos \varphi$$

$$Q_b = \sqrt{3}\, U_l I_l \sin \varphi \qquad (3.23)$$

$$S_b = \sqrt{3}\, U_l I_l.$$

2. Conexiunea în stea (Δ)

Puterea aparentă complexă la bornele receptorului este:

$$\underline{S}_b = \underline{U}_{1N}\underline{I}_1^* + \underline{U}_{2N}\underline{I}_2^* + \underline{U}_{3N}\underline{I}_3^*. \qquad (3.24)$$

Utilizînd notaţiile cunoscute:

$$\underline{U}_{1N} = U_f;\ \underline{U}_{2N} = \underline{a}U_f \text{ şi } \underline{U}_{3N} = \underline{a}^* U_f$$

şi

$$\underline{I}_1 = I_f e^{-j\varphi};\ \underline{I}_2 = \underline{a}\underline{I}_1 \text{ şi } \underline{I}_3 = \underline{a}^*\underline{I}_1,$$

obţinem:

$$\underline{S}_b = 3U_f I_f e^{j\varphi} = 3U_f I_f \cos \varphi + j\, 3U_f I_f \sin \varphi = P_b + j\, Q_b.$$

De aici rezultă:

$$P_b = 3U_f I_f \cos \varphi$$

$$Q_b = 3U_f I_f \sin \varphi \qquad (3.25)$$

$$S_b = 3U_f I_f.$$

Deoarece în această conexiune:

$$I_f = I_l \text{ şi } U_f = \frac{U}{\sqrt{3}},$$

obţinem şi formele echivalente:

$$P_b = \sqrt{3}\, U_l I_l \cos \varphi$$

$$Q_b = \sqrt{3}\, U_l I_l \sin \varphi \qquad (3.26)$$

$$S_b = \sqrt{3}\, U_l I_l.$$

Capitolul 4

PRODUCEREA ŞI TRANSMITEREA ENERGIEI ELECTRICE

A. GENERALITĂŢI

1. Sistem energetic

Din energia resurselor primare, sub diferitele forme cunoscute: hidraulică, chimică, nucleară, solară, eoliană etc., în *centralele electrice* se obţine energie termică şi electrică. Prin *reţelele de transmisie*, energia produsă de surse (centrale electrice) ajunge la *consumatori*. Aici, energia termică este utilizată ca atare, iar energia electrică este în prealabil convertită de receptoare într-o formă adecvată: mecanică, luminoasă, chimică, termică etc.

Toate instalaţiile aflate pe fluxul comun al energiei, începînd cu amenajările pentru extragerea sau captarea energiei resurselor primare, continuînd cu centralele şi reţelele de transmisie şi terminînd cu instalaţiile de conversie a energiei în forma necesară consumatorilor alcătuiesc **sistemul energetic.**

2. Sistem electric

Partea electrică a sistemului energetic poartă denumirea de **sistem electric (electroenergetic)** *(SE).*

Elementele componente ale *SE* corespund celor trei procese distincte care au loc în instalaţiile sistemului: producerea, transmiterea şi consumul energiei electrice. Astfel:

— *sursele convenţionale* (generatoare sincrone) produc energie electrică; există şi *surse neconvenţionale* (baterii solare, generatoare magnetohidrodinamice *MHD* etc.), care prezintă importanţă locală sau încă nu au depăşit cadrul experimental;

— *reţeaua electroenergetică* transmite consumatorilor energia produsă;

— *receptoarele electrice* ale consumatorilor absorb şi convertesc energia electrică primită.

o **Observaţie.** Producerea şi transmiterea energiei electrice se realizează, de regulă, *în sistem trifazat.*

În figura 4.1 este reprezentată simbolic schema fluxului de energie într-un *SE* (redat parţial).

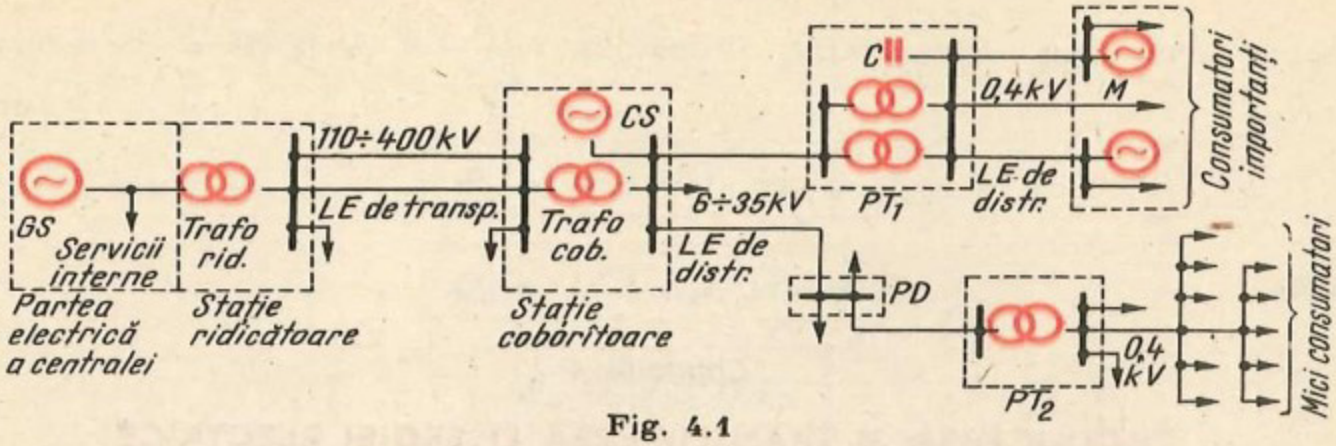


Fig. 4.1

a. *Surse convenționale de energie electrică*

Generatoarele sincrone (GS), instalate în centrale electrice, au puteri unitare cuprinse între cîțiva megawați și 2 000 MW (în țara noastră, limita superioară actuală a puterii unitare este de 330 MW). Energia electrică se produce la tensiuni cuprinse, în general, între 6 și 30 kV, dar există și hidrogeneratoare de puteri mici (sute de kW), cu tensiuni nominale sub 1 kV, deci care debitează energie la joasă tensiune (j.t.).

Generatoarele electrice funcționează la $f = 50$ Hz și furnizează energie sub un anumit factor de putere ($\cos \varphi$).

Din energia produsă de generatoare, o anumită cotă (1—14%) se distribuie serviciilor interne ale centralelor electrice (consum propriu tehnologic), iar restul se transmite în *SE*.

b. *Rețea electrică*

Rețeaua electrică (electroenergetică) preia energia generată de centralele electrice, pentru a o transmite consumatorilor.

Rețeaua cuprinde *stații* și *linii electrice*. Liniile și circuitele electrice din componența rețelei electrice, indiferent de tensiune și destinație, pot fi realizate ca linii electrice aeriene *(LEA)*, sau ca linii electrice subterane *(LES)* prin utilizarea cablurilor îngropate.

• **Stații ridicătoare de tensiune. Linii de transport.** Transmiterea energiei electrice presupune pierderi de energie în elementele rețelei, datorită efectului termic (Joule) al curentului electric. La aceeași putere transportată, cu cît tensiunea este mai ridicată, curenții vor fi mai mici și deci pierderile, proporționale cu pătratul intensității curentului, scad corespunzător. Din acest motiv, primul element al rețelei, aflat în ordinea fluxului energiei imediat după generatoare, este, de regulă, *stația ridicătoare de tensiune*. Aici, cu ajutorul transformatoarelor și autotransformatoarelor, tensiunea electrică este ridicată la valori înalte *(IT)* sau foarte înalte *(FIT)*, corespunzătoare tensiunilor la care funcționează liniile de transport (110—400 kV).

Tensiuni nominale. Costul liniei electrice crește odată cu adoptarea unei tensiuni de serviciu superioare. Prin urmare, va trebui aleasă o valoare a tensiunii care să fie optimă din punct de vedere tehnico-economic. Această valoare, stabilită prin calcule, depinde în special de puterea transmisă și de distanța la care trebuie transmisă energia. Practic, tensiunea nominală a liniei trebuie să aibă una dintre următoarele valori standardizate: 380 V, 6 kV, 10 kV, 20 kV, 35 kV, 110 kV, 220 kV, 400 kV (tensiunea de 35 kV este admisă, dar se recomandă a fi evitată la construirea instalațiilor noi).

Cînd puterile care urmează a fi transportate sau (şi) distanţele respective sînt foarte mari, tensiunile nominale ale liniilor pot depăşi 400 kV.

o **Notă.** O soluţie avantajoasă în anumite situaţii o constituie *transportul energiei la FIT în curent continuu.* La capetele unei asemenea linii trebuie să existe mutatoare capabile să convertească c.a. în c.c. sau invers, în funcţie de sensul transferului energiei.

• **Staţiile coborîtoare** reduc tensiunea electrică a liniilor de transport la valori medii (6—35 kV) convenabile liniilor de distribuţie. În staţiile coborîtoare de tensiune, mari noduri de consum industrial, se pot instala compensatoare sincrone *(CS)*, care reglează tensiunea pe barele staţiilor, producînd sau absorbind putere reactivă.

• **Reţele de distribuţie.** Distribuirea energiei electrice se realizează la 6—35 kV, uneori la 110 kV — pentru marii consumatori industriali. În figura 4.1 este prezentat un exemplu de distribuire a energiei prin intermediul *liniilor de distribuţie*, al *punctelor de distribuţie (PD)* şi *posturilor de transformare (PT)*. Ultimele realizează reducerea tensiunii la valorile joase (sub 1 kV) necesare micilor consumatori, îndeplinind un rol similar cu cel al staţiilor coborîtoare de tensiune.

• **Legături de interconexiune.** Staţiile de transformare, ridicătoare sau coborîtoare de tensiune, servesc deseori şi la interconectarea elementelor sistemului electric, prin intermediul liniilor de interconexiune. Noţiunile de „sistem" şi „reţea" se bazează tocmai pe existenţa acestor legături electrice multiple între centrale şi staţii.

Principiul interconexiunii se aplică şi în reţelele de distribuţie, cu ajutorul liniilor şi circuitelor electrice de buclare. Acestea asigură, în principiu, legătura între două puncte ale reţelei prin cel puţin două căi de curent diferite.

Consumatorii cu instalaţii electrice mai pretenţioase şi cu consum mare de energie posedă reţele de utilizare proprii în care se aplică, de asemenea, principiul buclării.

Interconectarea şi buclarea prezintă avantaje tehnice şi economice: creşterea siguranţei în funcţionare a sistemului şi în alimentarea cu energie a consumatorilor, îmbunătăţirea parametrilor la care se utilizează energia electrică, reducerea pierderilor de energie în reţele, optimizarea funcţionării centralelor electrice etc. Datorită acestor avantaje, soluţia interconectării se aplică şi sistemelor energetice naţionale învecinate.

c. *Receptoare electrice*

Receptoarele electrice ale consumatorilor funcţionează pe principii foarte diferite, adecvate utilizării energiei obţinute din energia electrică primită.

Tensiunea utilizată poate fi alternativă (monofazată sau trifazată) sau continuă, la valoare potrivită cu puterea şi tipul instalaţiei dar cuprinsă, în general, între cîţiva volţi şi cîteva mii de volţi.

B. COMPENSAREA PUTERII REACTIVE. ÎMBUNĂTĂŢIREA FACTORULUI DE PUTERE

Receptoarele cu ponderea cea mai însemnată în consumul de energie electrică sînt de natură inductivă: motoare asincrone, transformatoare de sudură, cuptoare de inducţie şi cu arc electric, aparate şi dispozitive care

conţin bobine etc. Asemenea receptoare, practic toate instalaţiile în care inductivităţile predomină asupra capacităţilor, determină un consum de putere reactivă inductivă. În aceeaşi situaţie se află şi circuitele electrice de utilizare a energiei, liniile de distribuţie, transformatoarele din staţii şi posturi de transformare. Rezultă că, de regulă, reţelele de utilizare şi distribuţie funcţionează în regim inductiv.

1. Efectele circulaţiei puterii reactive

Noţiunea de putere reactivă şi circulaţia acesteia între elementele capacitive şi cele inductive ale *SE* sînt, precum se cunoaşte, convenţii adoptate pentru a caracteriza schimbul permanent de energie între cîmpurile electrice şi cele magnetice ale elementelor *SE*. La acest schimb participă, cu aport capacitiv sau inductiv, şi generatoarele electrice ale sistemului.

Se constată că circulaţia puterii reactive pe elementele reţelei conduce la următoarele **dezavantaje**:

— *creşterea pierderilor de energie;*
— *pierderi de tensiune;*
— *creşterea investiţiilor în centrale şi reţele;*
— *reducerea capacităţii de încărcare.*

a. *Creşterea pierderilor de energie (efect electrocaloric)*

Dacă se ia ca exemplu o linie trifazată cu rezistenţa R (pe o fază), vehiculînd puterile P (activă) şi Q (reactivă) la tensiunea U, pierderile de putere activă (ΔP) în conductoarele liniei se determină astfel:

$$\Delta P = 3RI^2 = R\frac{P^2+Q^2}{U^2} = R\frac{P^2}{U^2} + R\frac{Q^2}{U^2}, \qquad (4.1)$$

deoarece $S = \sqrt{P^2+Q^2} = UI \Rightarrow I^2 = \frac{P^2+Q^2}{U^2}$ (S este puterea aparentă).

Se constată că circulaţia puterii reactive este însoţită de o pierdere de putere activă.

Cu expresia (4.1) se pot calcula pierderile de putere în orice element de reţea (transformator, generator, linie electrică etc.) sau receptor electric la care nu se urmăreşte obţinerea de căldură prin efectul termic al curentului electric.

b. *Pierderi de tensiune*

Se cunoaşte că valoarea tensiunii este un parametru de calitate al energiei electrice.

În orice element de reţea, caracterizat de parametrii longitudinali R (rezistenţă) şi X (reactanţă), transmiţînd puterile P şi Q sub tensiunea U, apare o pierdere de tensiune (de fază) ΔU între cele două capete:

$$\Delta U = U_A - U_B \cong RI\cos\varphi + XI\sin\varphi = \frac{PR+QX}{U} = \frac{PR}{U} + \frac{QX}{U}. \qquad (4.2)$$

Ca exemplu, în figura 4.2, *a* a fost considerat cazul unei linii electrice (schema monofilară), iar în figura 4.2, *b* s-a reprezentat diagrama fazorială a tensiunii şi curentului pe una dintre faze. Relaţia (4.2) se poate deduce simplu pe baza diagramei, proiectînd $\underline{U}_A$ pe $\underline{U}_B$.

Întrucît reactanţa X este comparabilă, ca valoare, cu rezistenţa R (de multe ori o depăşeşte), ponderea puterii Q în valoarea ΔU poate fi comparabilă cu cea a puterii P sau chiar mai mare. Această situaţie poate conduce la variaţii mari ale nivelurilor de tensiune în reţea şi la consumatori, înrăutăţind condiţiile de exploatare a instalaţiilor.

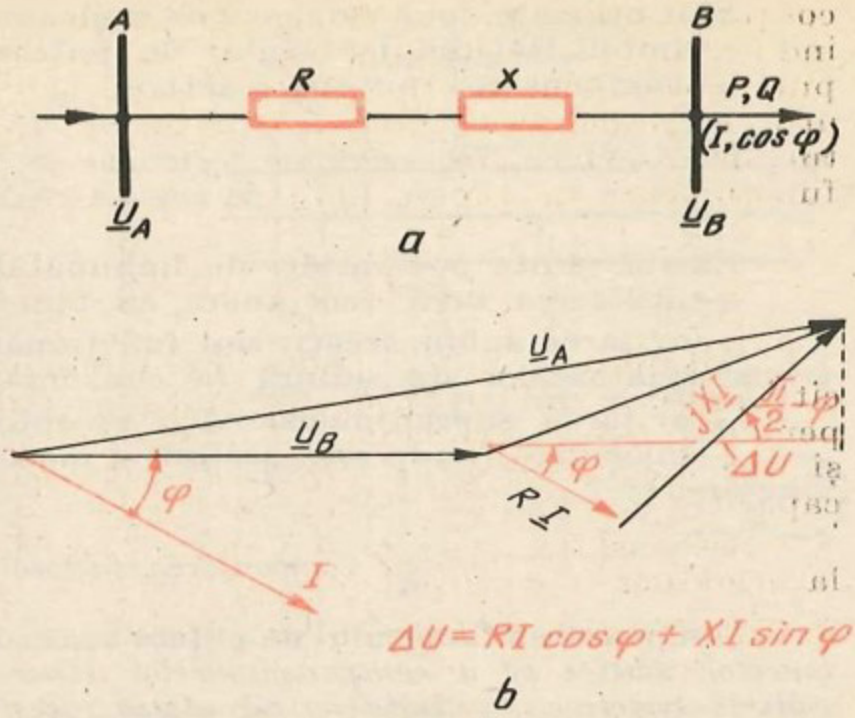


Fig. 4.2

c. *Creşterea investiţiilor în centrale şi reţele*

În centralele şi staţiile electrice costul generatoarelor şi transformatoarelor creşte odată cu puterea lor instalată:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Se observă că, pe măsura creşterii puterii reactive, creşte şi puterea aparentă deci şi costul. Se tinde ca puterea Q să fie cît mai redusă; totuşi, din anumite motive tehnice, ea nu poate fi coborîtă sub o anumită limită.

Din expresiile (4.1) şi (4.2) se observă că pentru a menţine pierderile ΔP şi ΔU în limite rezonabile chiar în condiţiile creşterii puterii reactive Q, o soluţie ar fi reducerea rezistenţei R prin creşterea secţiunii conductoarelor. O altă soluţie ar fi ridicarea tensiunii de serviciu U. Ambele variante necesită însă costuri suplimentare de investiţie.

○ **Observaţie.** Concluziile se aplică întocmai şi receptoarelor electrice.

d. *Reducerea capacităţii de încărcare*

Pentru o instalaţie dată, spre a nu se depăşi limitele admise ale pierderilor trebuie scăzut transferul de putere activă (P). Rezultă, deci, o diminuare nedorită a capacităţii de încărcare a instalaţiei respective.

2. Mijloace pentru reducerea circulaţiei de putere reactivă

Reducerea circulaţiei de putere reactivă echivalează cu îmbunătăţirea factorului de putere ($\cos \varphi = k_p$), întrucît:

$$Q = \sqrt{3}\, UI \sin \varphi.$$

Sînt utilizate două categorii de mijloace pentru reducerea puterii reactive:
— îmbunătățirea factorului de putere al receptoarelor;
— compensarea puterii reactive.

a. *Îmbunătățirea factorului de putere al receptoarelor de energie electrică*

Există multe posibilități de îmbunătățire a factorului de putere:
— utilizarea unor receptoare cu factor de putere ridicat;
— evitarea subîncărcării sau funcționării în gol a motoarelor asincrone, transformatoarelor de sudură (a consumatorilor inductivi — în general);
— evitarea supradimensionării receptoarelor;
— înlocuirea (unde este posibil) a motoarelor asincrone mari cu motoare sincrone etc.

b. *Compensarea factorului de putere*

Compensarea factorului de putere se rezumă practic la *utilizarea condensatoarelor statice și a compensatoarelor sincrone pentru compensarea locală a puterii reactive, evitîndu-se circulația acesteia în rețea.*

• **Compensarea cu condensatoare statice.**

Condensatoarele pot fi instalate *la consumator*, îmbunătățindu-i astfel factorul de putere sub care absoarbe energia din rețea pînă la (cel puțin) o valoare fixată de întreprinderea furnizoare de electricitate. Această valoare, numită *factor de putere neutral*, este actualmente, în țara noastră, egal cu 0,93. Pentru cos $\varphi < 0{,}93$ marii consumatori de energie sînt penalizați, iar pentru cos $\varphi > 0{,}93$ primesc bonificații.

Se pot monta condensatoare și *în instalațiile întreprinderii furnizoare de electricitate*, pe barele de j.t. ale *PT* sau pe barele de 6—20 kV ale stațiilor coborîtoare de tensiune.

Pentru instalațiile de joasă tensiune trifazate, **condensatoarele se fabrică,** în obicei, *în construcție trifazată*, conectate în triunghi, formînd grupe independente, spre a se putea cupla în raport de necesități. Pentru tensiuni peste 1 kV, condensatoarele sînt *în execuție monofazată*, putînd fi conectate în stea sau triunghi.

Condensatoarele sînt realizate cu armături din folii de aluminiu și dielectric din hîrtie uleiată sau pelicule din materiale sintetice. Capacitățile pe o fază ale condensatoarelor industriale destinate compensării puterii reactive variază, în general, între 75 μF și 600 μF la j.t., respectiv între 0,3 μF și 5 μF la tensiuni peste 1 kV.

Comanda conectării grupelor de condensatoare se poate face fie *manual*, în raport cu necesitățile de putere reactivă, fie *automat*, în funcție de valoarea tensiunii pe bara de racord, cu ajutorul unui regulator automat de tensiune *(RAT)*.

În figurile 4.3, *a* și *b* sînt prezentate două tipuri de scheme pentru conectarea condensatoarelor.

• **Compensatoarele sincrone** *(CS)* sînt mașini sincrone rotative care se instalează pe barele de 2—20 kV ale unor stații coborîtoare de tensiune, noduri importante de consum. Compensatoarele sincrone produc sau absorb putere reactivă, după cum funcționează în regim supraexcitat sau subexcitat. Puterea lor aparentă nominală variază în general între 5 și 50 MVA. Comanda

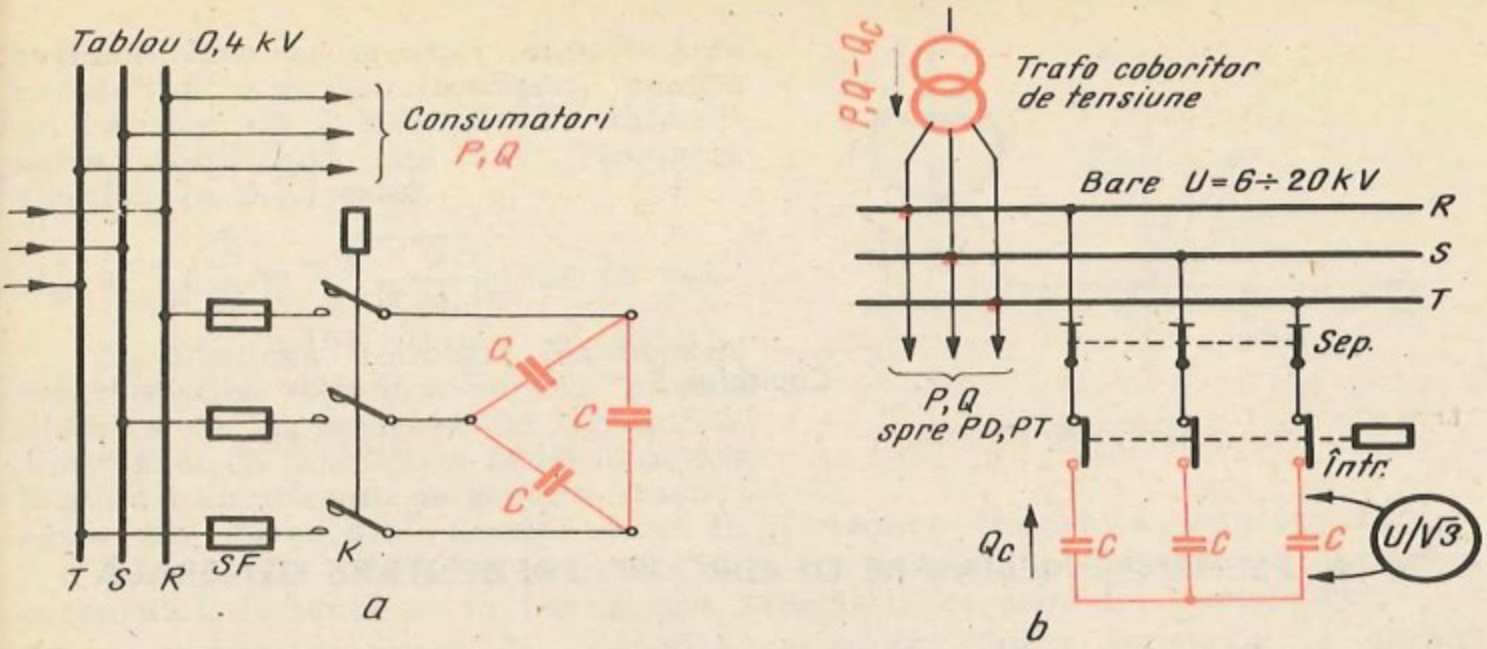


Fig. 4.3

excitației se realizează prin *RAT*, în funcție de valoarea parametrului reglat (tensiunea).

○ **Notă.** La marii consumatori industriali care posedă motoare sincrone *(MS)*, acestea pot realiza, pe lîngă acționarea mașinilor de lucru cu care sînt cuplate, și un reglaj tensiune-putere reactivă, prin modificarea curentului de excitație, întocmai ca la compensatoarele sincrone.

Aplicație. *La bara de 10 kV a unei stații coborîtoare de tensiune cu un consum echivalent* $P = 4\,000$ *kW, sub cos* $\varphi = 0{,}8$ *(inductiv), se conectează o baterie de condensatoare legată în stea, pentru compensarea puterii reactive pînă la factorul de putere echivalent cos* $\varphi_e = 1$ *(fig. 4.3, b). Să se calculeze capacitatea necesară C pe fiecare fază și pierderile de putere în transformatorul coborîtor de tensiune al stației, dacă rezistența echivalentă pe o fază a acestuia este* $R_T = 0{,}08\ \Omega$.

Puterea reactivă echivalentă a receptorului Q se determină astfel:

$$Q = \frac{P}{\cos\varphi}\sin\varphi = \frac{4\,000}{0{,}8}\cdot 0{,}6 = 3\,000 \text{ kvar}.$$

Anterior compensării, curentul I_T prin transformator este:

$$I_T = \frac{P}{\sqrt{3}\,U\cos\varphi} = \frac{4\,000}{\sqrt{3}\cdot 10\cdot 0{,}8} = 290 \text{ A}.$$

În acest caz, puterea pierdută în transformator este:

$$\Delta P_1 = 3\,R_T I_T^2 = 3\cdot 0{,}08\cdot 290^2 = 20{,}2 \text{ kW}.$$

După compensarea (completă) a puterii reactive, cos $\varphi = 1$ iar curentul I_T' prin transformator va fi.

$$I_T = \frac{P}{\sqrt{3}\,U\cos\varphi} = 232 \text{ A}.$$

În acest caz, puterea pierdută în transformator va fi:

$$\Delta P_T' = 3\cdot 0{,}08\cdot 232^2 = 12{,}9 \text{ kW} < \Delta P_T.$$

Bateria de condensatoare compensează puterea reactivă:

$$Q = |Q_C| = 3\,000 \text{ kvar} = 3\,C\omega\left(\frac{U}{\sqrt{3}}\right)^2.$$

Din relația anterioară rezultă capacitatea pe o fază a bateriei:

$$C = 95{,}54\ \mu\text{F}.$$

Capitolul 5

CIRCUITE ELECTRICE ŞI ELECTRONICE NELINIARE

A. ELEMENTE NELINIARE DE CIRCUIT PREZENTARE GENERALĂ

În capitolele precedente ne-am ocupat numai de funcţiunile şi metodele de studiu specifice circuitelor electrice liniare, adică circuitelor electrice alcătuite numai din elemente liniare (cu caracteristică curent-tensiune liniară).

○ **Notă.** Aşa cum se va vedea, *proprietatea elementelor de circuit de a prezenta caracteristici liniare nu este de fapt decît o idealizare a comportării lor reale.*

• Un element pasiv de circuit, de exemplu *rezistorul* este un **element liniar** dacă dependenţa curentului de tensiune la borne este liniară,

$$i = \frac{1}{R} u$$

oricare ar fi valoarea şi sensul curentului în element. Rezistenţa electrică R a unui rezistor liniar este o mărime scalară, pozitivă, independentă de curentul ce trece prin rezistor. Altfel spus, o creştere a intensităţii curentului prin rezistor de λ ori are ca efect o creştere de λ ori a tensiunii la borne şi ca urmare raportul între tensiune şi curent are o valoare constantă, egală cu rezistenţa rezistorului. Graficul funcţiei $i = \frac{1}{R} u$, prezentat în figura 5.1, poartă numele de *caracteristica curent-tensiune a rezistorului*. Caracteristica $i - u$ a unui rezistor este o dreaptă care trece prin originea axelor de coordonate şi este situată în cadranele *1* şi *3*.

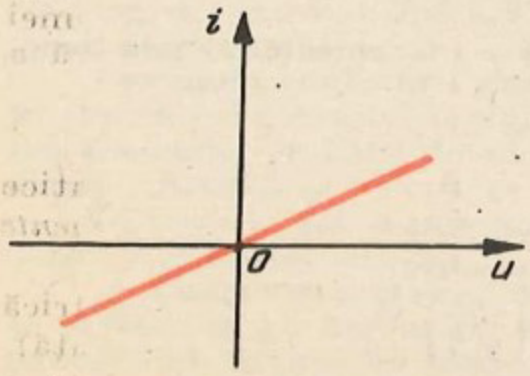


Fig. 5.1

○ **Notă.** Acest mod de a caracteriza rezistorul nu este însă în concordanţă cu experienţa decît pentru intensităţi ale curentului care nu provoacă o încălzire notabilă datorită efectului electrocaloric al curentului. Din acest motiv, pentru orice rezistor, fabricantul trebuie să indice, în afară de valoarea rezistenţei, şi *puterea disipată admisibilă*. Această putere limitează curentul care poate să treacă prin

rezistor fără a provoca modificarea rezistenței sale. De exemplu, pentru un rezistor de 2 kΩ/0,5 W, intensitatea admisibilă în c.c. (valoarea efectivă în c.a.) este:

$$I_{ad} = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{0{,}5}{2 \times 10^3}} \cong 16 \text{ mA}.$$

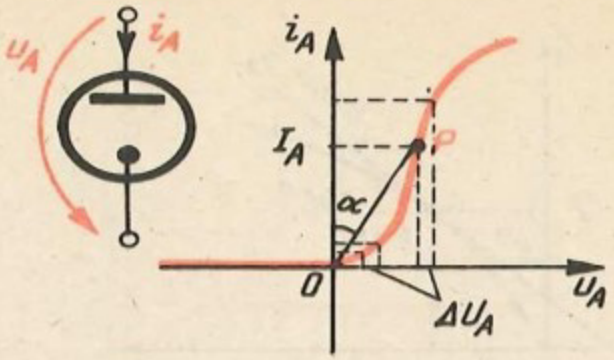


Fig. 5.2

• **Element neliniar.** Examinînd caracteristica tensiune-curent a unei *diode cu vid*, prezentată în figura 5.2, constatăm că la creşteri egale Δu_A ale tensiunii anodice nu corespund creşteri egale ale curentului anodic decît în porţiunea liniară a caracteristicii.

Elementele de circuit rezistive care nu prezintă o dependenţă liniară a curentului de tensiune la borne sînt caracterizate prin doi parametri:

— *rezistenţa statică* R_{st}, definită ca raport între tensiune şi curent într-un punct P de pe caracteristică, numit *punct static de funcţionare* (prescurtat, *PSF*):

$$R_{st} = \frac{U_A}{I_A} = k \text{ tg } \alpha \tag{5.1}$$

Rezistenţa statică este deci proporţională cu tangenta trigonometrică a unghiului α format de dreapta OP cu axa curentului, constanta de proporţionalitate k fiind determinată de raportul scărilor grafice utilizate pentru tensiune şi respectiv pentru curent. Rezistenţa statică a diodei cu vid este o mărime pozitivă, dependentă de tensiunea anodică;

— *rezistenţa dinamică în punctul static* r_d, proporţională cu tangenta trigonometrică a unghiului de înclinare β faţă de axa curentului, a tangentei geometrice la graficul caracteristicii în punctul static de funcţionare (fig. 5.3):

$$r_d = \lim_{\Delta i \to 0} \frac{\Delta u_A}{\Delta i_A}\bigg|_P = \frac{du_A}{di_A}\bigg|_P = k \text{ tg } \beta \tag{5.2}$$

unde k este raportul scărilor de tensiune şi curent folosite pentru graficul caracteristicii statice. Rezistenţa dinamică este *pozitivă* în porţiunile ascendente ale caracteristicii tensiune-curent, deoarece unei variaţii pozitive Δu_A a tensiunii la borne îi corespunde o variaţie a curentului Δi_A, de asemenea pozitivă (fig. 5.3, *a*); în porţiunile descendente ale caracteristicii statice, unei variaţii pozitive Δu_A a tensiunii îi corespunde o variaţie Δi_A negativă a curentului prin element şi deci raportul $\frac{\Delta u_A}{\Delta i_A}$ este *negativ* (fig. 5.3, *b*).

• **Tipuri de elemente neliniare.** După forma caracteristicii statice $i = f(u)$, elementele neliniare se pot clasifica în *elemente simetrice* şi *elemente nesimetrice*.

Un element neliniar este *simetric* dacă are caracteristica statică simetrică faţă de originea axelor de coordonate (de exemplu, becul cu incandescenţă).

Dioda cu vid este un element neliniar *nesimetric*, capabil să conducă curentul într-un singur sens. Pentru tensiuni anodice negative dioda se pre-

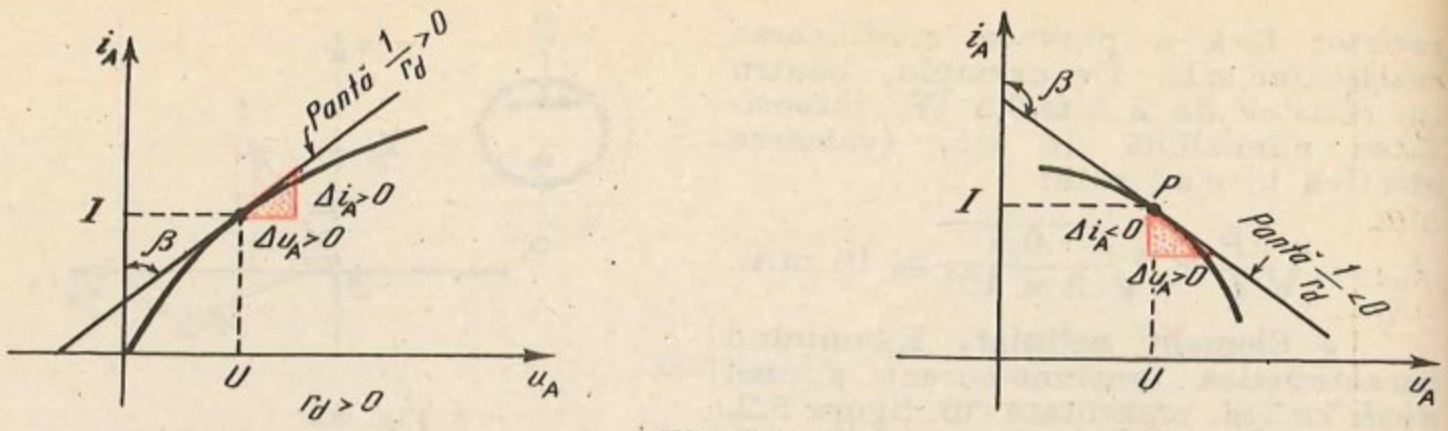


Fig. 5.3

zintă asemenea unui întrerupător deschis, deoarece curentul anodic este nul (v. fig. 5.2). Această particularitate a diodei cu vid este folosită în tehnica redresării curentului alternativ.

Alte elemente neliniare utilizate frecvent în circuitele de c.c. sau c.a. sînt: termistorul, tubul baretor, dioda semiconductoare, dioda tunel, dioda Zener etc., toate — elemente de circuit cu două borne de acces, pentru care vom prezenta pe scurt anumite particularităţi extrem de utile pentru aplicaţiile tehnice.

1. Lampa cu incandescenţă

• **Lampa cu incandescenţă,** utilizată în tehnica iluminatului electric, se compune dintr-un filament din material greu fuzibil (wolfram) dispus într-un balon de sticlă în care se face vid sau se introduc gaze inerte. Prezenţa gazului inert împiedică vaporizarea filamentului favorizată de temperatura mare de lucru (2 500—3 000°C). Lampa cu incandescenţă are „la cald" o rezistenţă statică mai mare decît „la rece".

• **Caracteristica statică** $u—i$ a unei *lămpi cu incandescenţă cu filament din wolfram*, prezentată în figura 5.4, pune în evidenţă comportarea sa neliniară simetrică.

Caracteristica statică a unei *lămpi cu incandescenţă cu filament de cărbune* prezentată în figura 5.5 scoate în evidenţă o dependenţă a rezistenţei statice de curent, inversă faţă de lampa cu filament metalic.

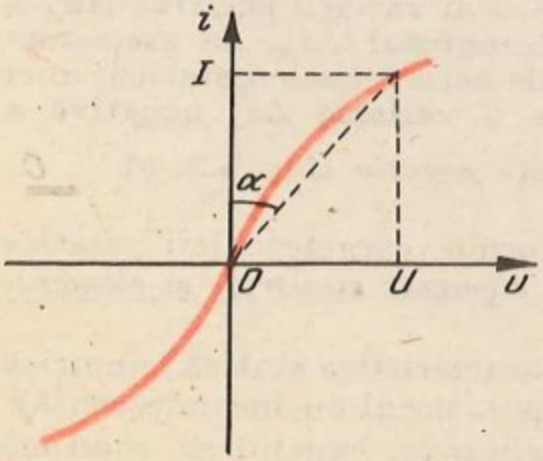


Fig. 5.4

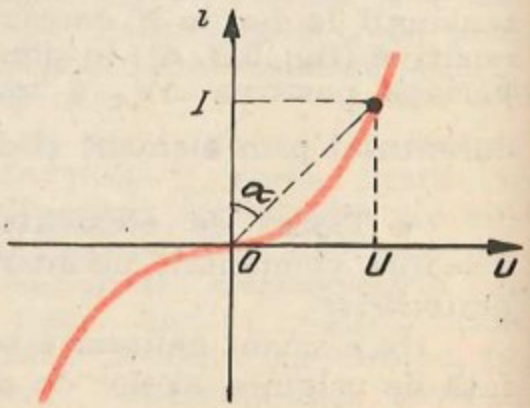


Fig. 5.5

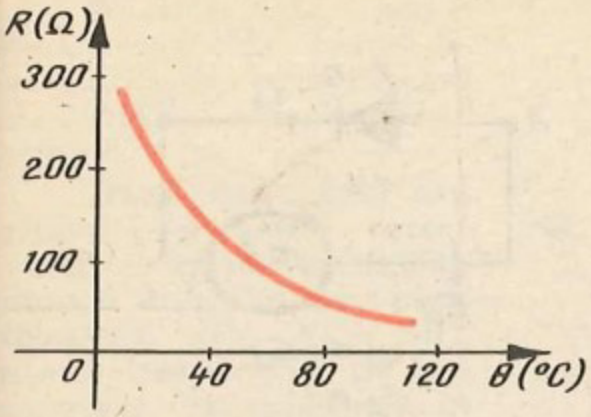


Fig. 5.6

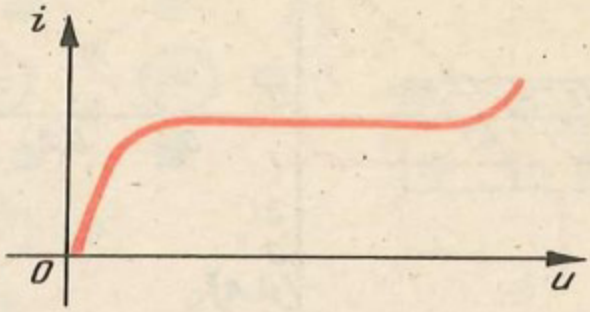


Fig. 5.7

2. Termistorul

• **Termistorul este** un rezistor neliniar **obţinut prin** sinterizarea unor oxizi metalici ca NiO, Mn_2O_3 şi CO_2O_3, care prezintă un coeficient negativ de temperatură al rezistivităţii. Variaţia rezistivităţii cu temperatura este foarte mare şi pronunţat neliniar (fig. 5.6). Termistoarele sînt utilizate în releele termice, în termometrie, în dispozitivele de acţionare etc.

3. Tubul baretor

• **Tubul baretor se compune,** ca şi becul cu incandescenţă, dintr-un filament confecţionat însă din fier dispus într-un balon, în atmosferă de hidrogen.

• Pe **caracteristica statică a baretorului** (fig. 5.7) se remarcă existenţa unei porţiuni în care curentul este independent de tensiunea la borne. Proprietatea aceasta îşi găseşte utilizare în tehnică în instalaţii care funcţionează în c.c. la valori constante ale curentului.

4. Dioda semiconductoare

• **Caracteristica statică.** Dioda semiconductoare sau joncţiunea $p-n$ este un dispozitiv electronic cu două borne de acces. Părţile componente ale diodei semiconductoare şi simbolul grafic sînt prezentate în figurile 5.8, *a*, *b*. În unul dintre sensuri, de la semiconductorul de tip p către semiconductorul de tip n, pe care-l denumim *sens direct*, dioda conduce bine curentul, prezentînd o rezistenţă electrică mică. În sensul opus, de la semiconductorul de tip n la cel de

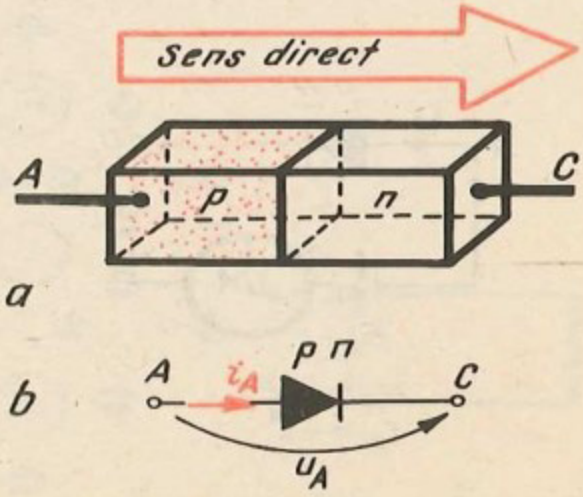


Fig. 5.8

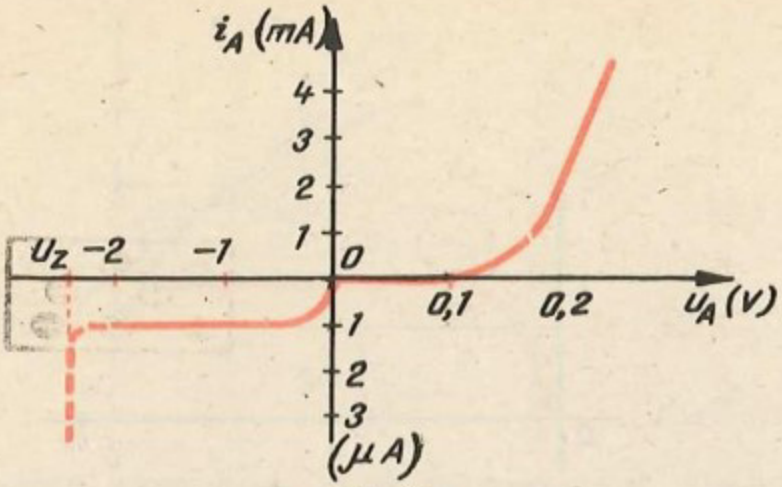


Fig. 5.9

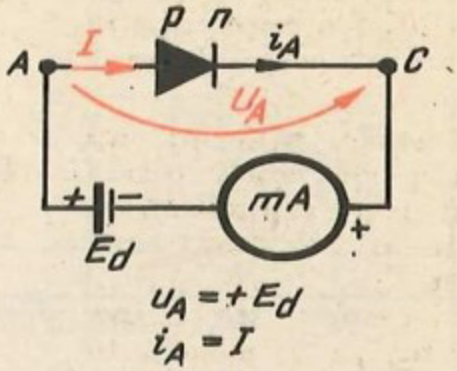


Fig. 5.10

tip *p (sens invers)*, dioda conduce rău curentul, prezentînd în consecinţă o rezistenţă electrică mare. Această proprietate a diodei semiconductoare se ilustrează pe caracteristica statică prezentată în figura 5.9, unde s-au folosit scări grafice diferite pentru porţiunile situate în cadranele *1* şi *3*. Porţiunea din primul cadran corespunde polarizării joncţiunii în sens direct, aşa cum se arată în figura 5.10, unde pentru măsurarea curentului se utilizează un miliampermetru de c.c. Porţiunea din cadranul al treilea corespunde polarizării joncţiunii în sens invers (fig. 5.11). Sensul curentului prin diodă este opus sensului iniţial şi de valoare mult mai mică. Pentru măsurarea acestui curent este prevăzut în circuit un microampermetru de c.c. (μA).

• **Mecanismul microscopic al funcţionării unei diode semiconductoare.**

Semiconductoarele sînt materiale cristaline care **în stare pură (intrinsecă)** prezintă o *conductivitate electrică foarte mică*. Germaniul şi siliciul, care sînt cele mai larg utilizate în tehnică, au la temperatura ambiantă (300 °K) rezistivităţi mult mai mari decît ale metalelor ($\rho_{Ge} = 0{,}45\ \Omega \cdot m$, $\rho_{Si} = 2{,}30\ \Omega \cdot m$, faţă de $\rho_{Cu} = 1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot m$ şi $\rho_{Al} = 2{,}65 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot m$). Ele sînt elemente tetravalente. Cei patru electroni de valenţă ai unui atom intră în legături covalente cu atomii vecini. Stratul de valenţă al fiecărui atom va avea astfel opt electroni şi practic nu vor exista electroni liberi, disponibili pentru conducţia curentului (fig. 5.12).

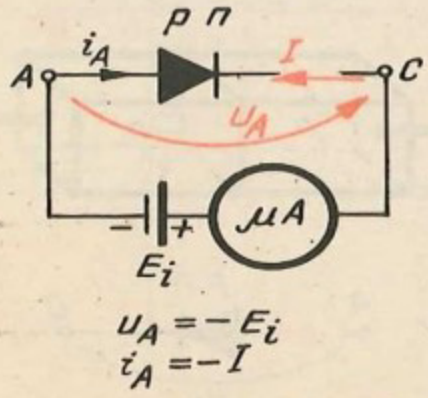


Fig. 5.11

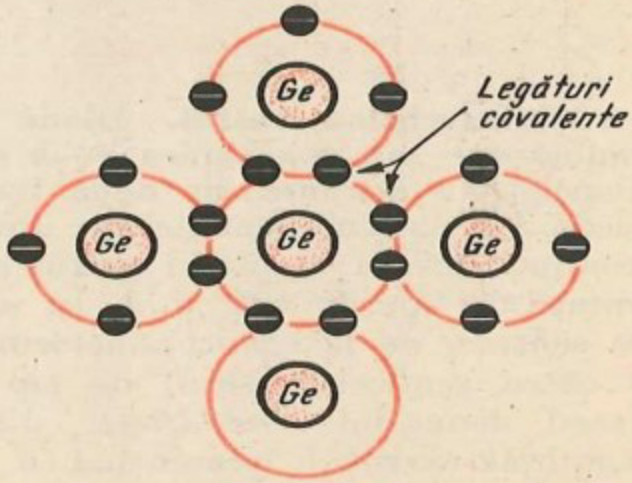


Fig. 5.12

Rezistivitatea semiconductoarelor scade apreciabil prin impurificare cu atomi ai altui element chimic.

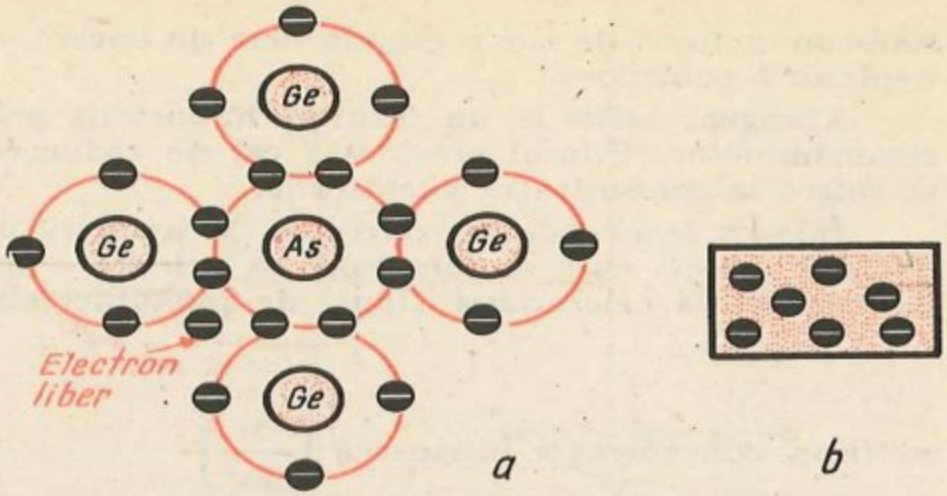


Fig. 5.13

Dacă germaniul sau siliciul (elemente tetravalente) **se impurifică cu atomii unui element pentavalent** (P, As, Sb), atomii respectivi de impuritate se plasează în reţeaua cristalină a materialului pur (fig. 5.13, *a*) în locul unora dintre atomii săi, în anumite poziţii fixe. Patru dintre cei cinci electroni de valenţă ai atomului de impuritate intră în legături covalente cu atomii vecini de germaniu. Al cincilea electron, fiind slab legat de atomul de impuritate, poate deveni liber, fiind astfel disponibil pentru conducţia curentului. Energia care trebuie cheltuită pentru a „detaşa" acest electron din atom este de 0,01 eV pentru germaniu şi 0,05 eV pentru siliciu.

Elementele pentavalente joacă pentru semiconductorul pur rolul de *elemente donoare* de electroni. Ele se numesc donoare, iar semiconductorul aliat cu elemente donoare este un *semiconductor de tip n* (negativ) (fig. 5.13, *b*).

Dacă însă germaniul sau siliciul se impurifică cu atomi ai unor elemente trivalente (B, Ga, In), cei trei electroni de valenţă ai atomului de impuritate formează legături covalente numai cu trei dintre cei patru atomi vecini din reţeaua cristalină (fig. 5.14, *a*). Absenţa unui electron, deci a unei sarcini negative, în cea de-a patra legătură covalentă, este indicată în figura 5.14, *a* printr-un „gol" pozitiv. O legătură covalentă incompletă se manifestă deci ca o sarcină pozitivă. Elementele trivalente joacă pentru semiconductorul pur, tetravalent, rolul de *elemente acceptoare* (de electroni), deoarece pentru realizarea legăturii covalente incomplete atomul de impuritate trivalent „acceptă" un electron de valenţă din legăturile covalente vecine. Dar un electron care părăseşte o legătură covalentă pentru a umple golul vecin lasă un „loc vacant" pentru un alt electron de valenţă, adică un alt gol. Prin urmare, golul se deplasează efectiv prin reţeaua cristalină a semiconductorului impurificat, în sens invers deplasării electronului.

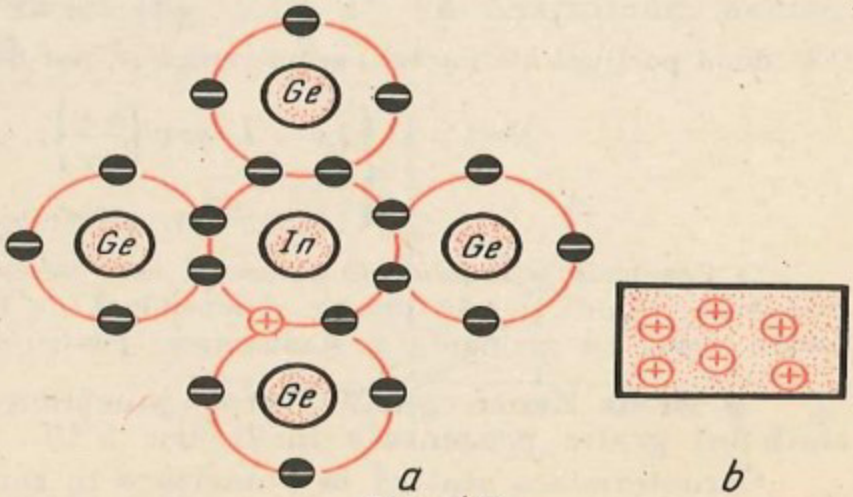


Fig. 5.14

Cînd în semiconductorul impurificat cu elemente acceptoare (indicat schematic în fig. 5.14, *b*), denumit *semiconductor de tip p* (pozitiv) se stabileşte un cîmp electric, are loc o deplasare ordonată a golurilor în sensul cîmpului electric. Prin

semiconductorul de tip p circulă deci un curent electric de conducţie datorat deplasării golurilor.

Ajungem astfel la un rezultat important privitor la impurificarea unui semiconductor. Primul efect este cel de reducere a rezistivităţii. Al doilea se referă la concentraţia purtătorilor.

Într-un semiconductor intrinsec, la temperatura ambiantă există perechi electroni-goluri care se formează ca urmare a mişcării de agitaţie termică. Concentraţiile celor două tipuri de purtători sînt egale, respectiv

$$p = n = n_i \,, \tag{5.3}$$

n_i fiind concentraţia intrinsecă $\left(\frac{1}{\text{cm}^3}\right)$.

Într-un semiconductor de tip n electronii sînt purtători majoritari şi au concentraţia mult mai mare decît a golurilor care sînt purtători minoritari. Invers, *într-un semiconductor de tip p* purtătorii majoritari sînt golurile, iar electronii sînt purtători minoritari.

Aplicaţie. *Ecuaţia caracteristicii statice a unei diode semiconductoare cu germaniu este* $i_A = I_s\left[\exp\left(\frac{u_A}{u_T}\right) - 1\right]$, *unde* $u_T = \frac{kT}{e}$, k *fiind constanta lui Boltzmann şi* e *— sarcina elementară, iar* I_s, *numit „curent de saturaţie", este curentul prin joncţiunea polarizată în sens invers. Să se determine parametrul* u_T *la temperatura de 20°C şi expresiile aproximative ale ecuaţiei caracteristicii statice pentru polarizări ale diodei în ambele sensuri.*

Parametrul u_T are, la 20°C, valoarea

$$u_T = \frac{T}{e/k} = \frac{T}{11\,600} = \frac{293}{11\,600} = 25 \text{ mV}. \tag{5.4}$$

Dacă diodă este polarizată *în sens direct* cu tensiunea $u_A = 0{,}15$ V, se obţine:

$$i_A = I_s\left[\exp\left(\frac{0{,}15}{25 \times 10^{-3}}\right) - 1\right] = I_s[\exp\,(6) - 1] \cong 400\ I_s.$$

Pentru o polarizare *în sens invers* cu $u_A = -0{,}15$ V, curentul anodic este:

$$i_A = I_s[\exp\,(-6) - 1] = I_s\left[\frac{1}{400} - 1\right] \cong -I_s.$$

Cele două porţiuni ale curbei caracteristice se pot deci aproxima astfel:

$$\begin{cases} i_A = I_s \exp\left(\frac{u_A}{u_T}\right); & u_A > 0 \\ i_A = -I_s; & u_A < 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

○ **Concluzie.** *Curentul de saturaţie* este determinat de purtătorii minoritari din cele două regiuni şi este practic independent de tensiunea de polarizare (microamperi pentru dioda cu germaniu şi nanoamperi pentru cea cu siliciu).

• **Dioda Zener** constă dintr-o joncţiune p-n cu caracteristica statică şi simbolul grafic prezentate în figura 5.15.

Caracteristica statică la polarizare în sens direct este identică cu a unei diode obişnuite. La polarizarea joncţiunii în sens invers, caracteristica pre-

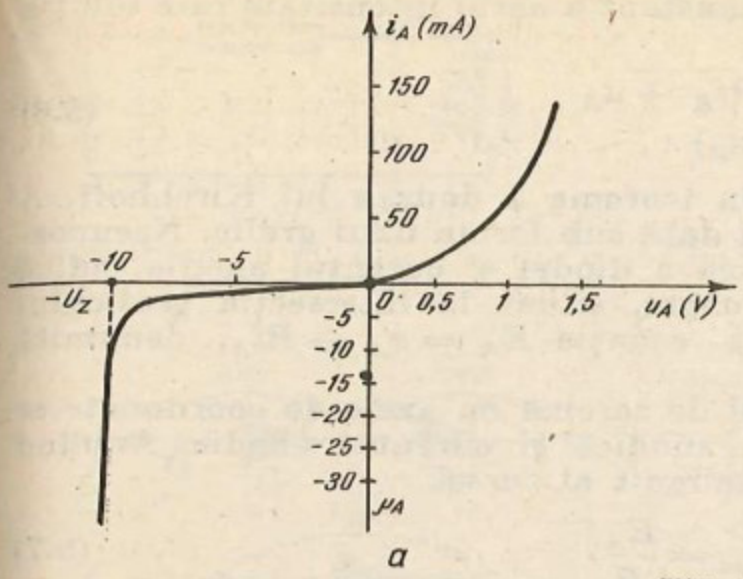


Fig. 5.15

zintă o porțiune abruptă situată la tensiunea $u_A = -U_Z$, unde o variație mică a tensiunii provoacă o variație mare a curentului fără ca dioda să se străpungă. Datorită acestei proprietăți, dioda Zener se utilizează în redresoarele stabilizate de tensiune (surse de c.c; stabilizate).

• **Dioda tunel** este tot o diodă semiconductoare, a cărei caracteristică statică nu este însă în permanență ascendentă, în sensul că pentru anumite valori ale tensiunii curentul descrește cînd tensiunea crește. În acest domeniu al tensiunii de polarizare dioda tunel prezintă o *rezistență dinamică negativă*, proprietate folosită în tehnica generării de oscilații sinusoidale.

B. CIRCUITE ELECTRICE DE CURENT CONTINUU CU ELEMENTE NELINIARE. DETERMINAREA PUNCTULUI STATIC DE FUNCȚIONARE

1. Circuite cu un singur element neliniar

Pentru început vom analiza un circuit simplu, format dintr-o sursă de tensiune, un rezistor liniar și un element neliniar, de exemplu o diodă semiconductoare polarizată în sens direct (fig. 5.16, *a*). **Să determinăm punctul static de funcționare al diodei.**

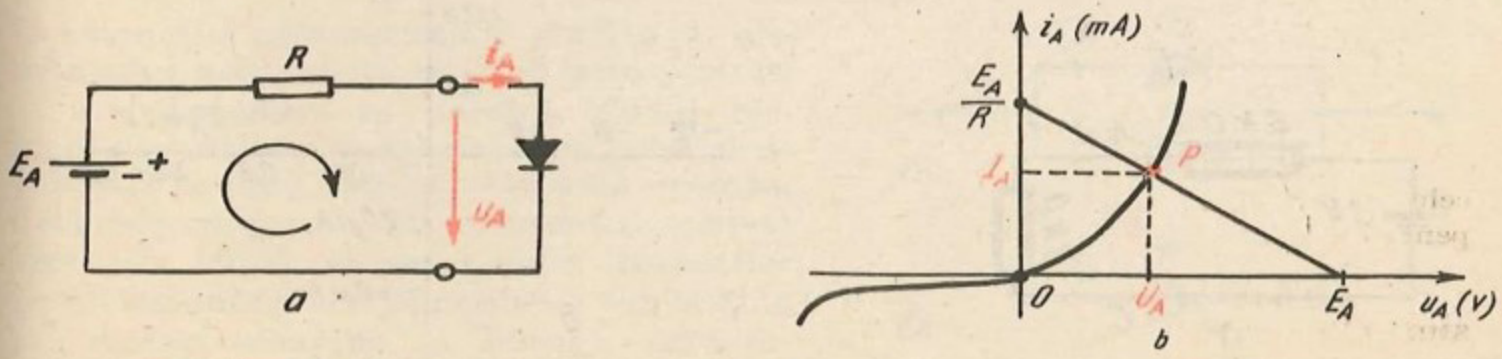


Fig. 5.16

În circuit se stabileşte un curent constant a cărui intensitate este soluţia sistemului de ecuaţii:

$$\begin{cases} E_A = Ri_A + u_A \\ i_A = f(u_A) \end{cases} \tag{5.6}$$

Prima ecuaţie a sistemului rezultă din teorema a doua a lui Kirchhoff. A doua ecuaţie este caracteristica statică dată sub forma unui grafic. Necunoscutele sistemului sînt tensiunea anodică a diodei şi curentul anodic, adică *coordonatele punctului static de funcţionare*, situat la intersecţia graficului caracteristicii statice cu dreapta de ecuaţie $E_A = u_A + Ri_A$, denumită *dreaptă de sarcină*.

Punctele de intersecţie ale dreptei de sarcină cu axele de coordonate se determină anulînd pe rînd tensiunea anodică şi curentul anodic. Anulînd tensiunea, se obţine curentul de scurtcircuit al sursei

$$I_{Ao} = I_{sc} = \frac{E_A}{R}. \tag{5.7}$$

Anulînd curentul se obţine tensiunea de mers în gol a sursei

$$U_{Ao} = E_A. \tag{5.8}$$

Dreapta de sarcină determinată de tăieturile sale pe axe intersectează graficul caracteristicii statice în punctul P de coordonate U_A şi I_A.

În aplicaţiile practice prezintă interes deosebit circuitele ce conţin un element neliniar conectat la bornele unui circuit liniar şi activ (dipol activ). Pentru determinarea punctului static de funcţionare al elementului neliniar se determină mai întîi generatorul echivalent de tensiune faţă de bornele dipolului, după care se foloseşte procedeul expus anterior.

Aplicaţie. *Să se determine coordonatele punctului static de funcţionare al diodei semiconductoare din circuitul din figura 5.17, a. Caracteristica statică a diodei este indicată în figura 5.17, b.*

Eliminînd dioda se obţine circuitul liniar din figura 5.18, care poate fi înlocuit cu generatorul echivalent faţă de bornele A şi C care are t.e.m. U_{ACO} şi rezistenţa internă R_{ACO}. Tensiunea U_{ACO} se determină cu formula divizorului de tensiune:

$$U_{ACO} = 3\,\frac{3}{3+6} = 1\ \text{V}.$$

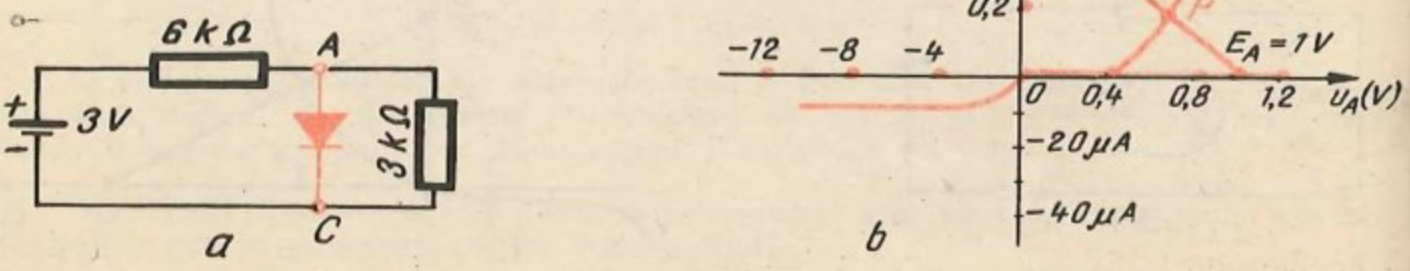


Fig. 5.17

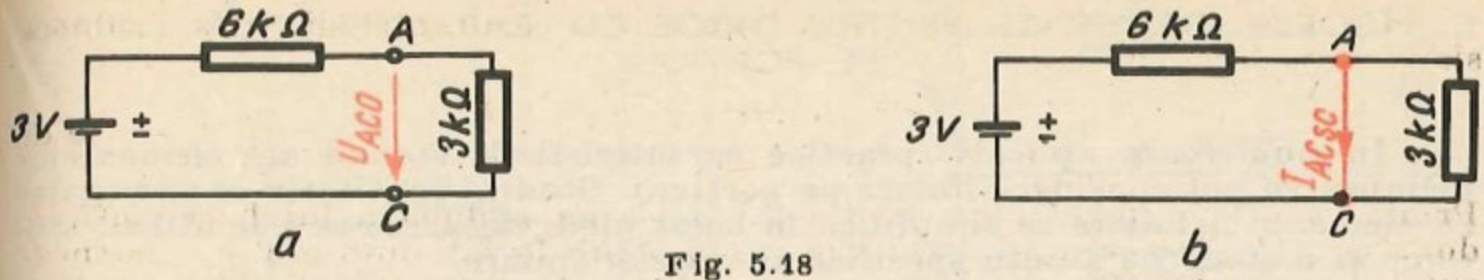


Fig. 5.18

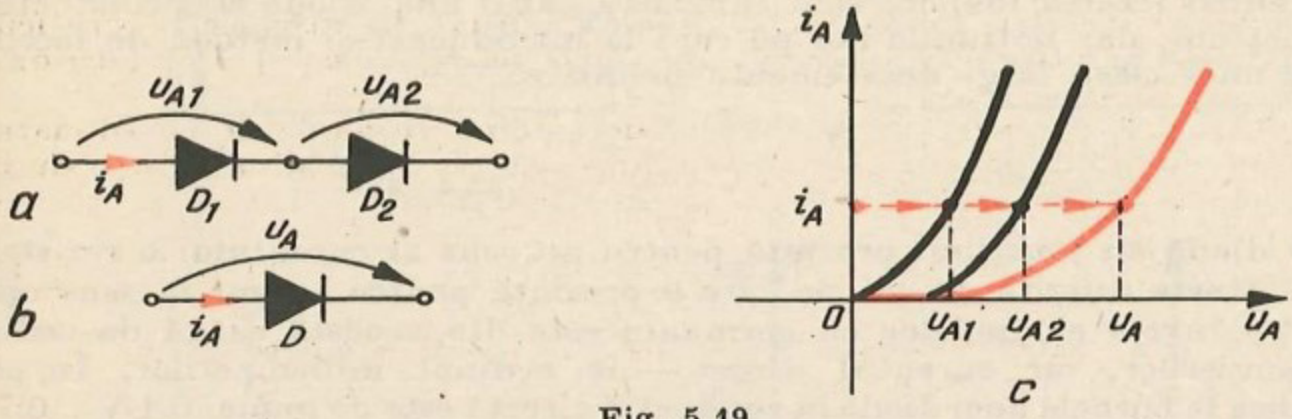


Fig. 5.19

Pentru a determina rezistența R_{ACO}, se calculează mai întîi curentul de scurtcircuit I_{ACsc}:

$$I_{ACsc} = \frac{3\ \text{V}}{6\ \text{k}\Omega} = 0{,}2\ \text{mA},$$

de unde se obține

$$R_{ACO} = \frac{U_{ACO}}{I_{ACsc}} = \frac{1\ \text{V}}{0{,}2\ \text{mA}} = 5\ \text{k}\,\Omega.$$

Circuitul echivalent este cel din figura 5.16, *a*. Intersecția dreptei de sarcină cu caracteristica statică determină punctul static de funcționare P de coordonate $U_A = 0{,}65$ V și $I_A = 0{,}18$ mA.

2. Asocierea elementelor neliniare

• **Asocierea în serie.** Două elemente neliniare asociate în serie (fig. 5.19,*a*) se pot înlocui cu un element neliniar echivalent (fig. 5.19, *b*) a cărui caracteristică statică se obține *sumînd pe orizontală caracteristicile statice ale celor două elemente* (fig. 5.19, *c*). Procedeul se justifică observînd că la același curent i_A tensiunea la borne este suma tensiunilor la bornele elementelor:

$$u_A = u_{A1} + u_{A2} \tag{5.9}$$

Construcția caracteristicii statice a elementului echivalent se face prin puncte.

• **Asocierea în paralel.** Cazul elementelor neliniare asociate în paralel se tratează în mod similar. De data aceasta, deoarece curentul prin elementul echivalent (fig. 5.20, *b*) este suma curenților prin elementele componente — fig. 5.20, *a* (la aceeași tensiune la borne), caracteristicile statice se adună pe verticală.

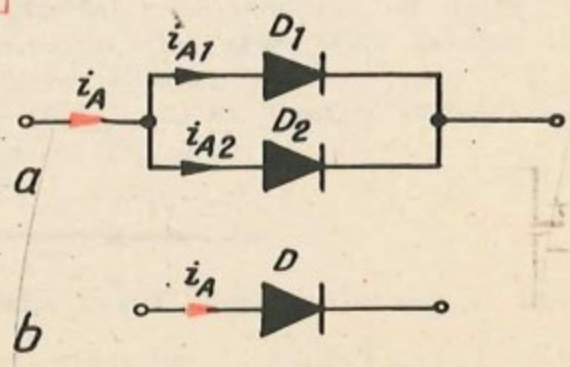


Fig. 5.20

C. MODELE IDEALIZATE PENTRU DIODE CU CARACTERISTICĂ LINIARĂ PE PORȚIUNI

În numeroase aplicații practice caracteristicile statice ale elementelor neliniare se pot considera liniare pe porțiuni. Studiul cantitativ al circuitelor cu elemente neliniare se simplifică în acest mod, deoarece se pot utiliza teoreme și metode de studiu specifice circuitelor liniare.

Pentru fixarea ideilor, vom considera cazul unei diode semiconductoare cu joncțiuni, dar noțiunile noi pe care le introducem și metoda de lucru se aplică unei clase largi de elemente neliniare.

1. Dioda ideală

O diodă cu joncțiuni prezintă pentru un sens al curentului o rezistență statică foarte diferită de cea pe care o prezintă pentru curent în sens opus. Curentul invers al diodelor cu germaniu este din această cauză de ordinul microamperilor, iar curentul direct — de ordinul miliamperilor. În plus, tensiunea la bornele unei diode în conducție directă este de numai 0,1 V ...0,7 V, față de tensiunile inverse, care pot atinge sute de volți. Dacă dioda este utilizată într-un circuit în care curenții sînt mari în comparație cu curentul invers, iar tensiunile sînt mari în comparație cu tensiunea de polarizare directă, dioda poate fi modelată prin ecuațiile:

$$\begin{cases} u_A = 0, \text{ pentru } i_A > 0; \\ i_A = 0, \text{ pentru } u_A < 0. \end{cases} \tag{5.10}$$

În acest model simplificat se neglijează căderea de tensiune în conducție directă și curentul în conducție inversă. Modelul diodei definit de relațiile de mai sus corespunde **diodei ideale** și reprezintă un exemplu de liniarizare pe porțiuni a caracteristicii statice.

Simbolul grafic și caracteristica statică a unei diode ideale sînt prezentate în figura 5.21. Joncțiunea *p-n* se poate reprezenta prin contactele unui întrerupător care trebuie considerat închis cînd dioda conduce și deschis cînd dioda este blocată. Altfel spus, rezistența diodei ideale este nulă cînd dioda conduce și infinită cînd dioda este blocată.

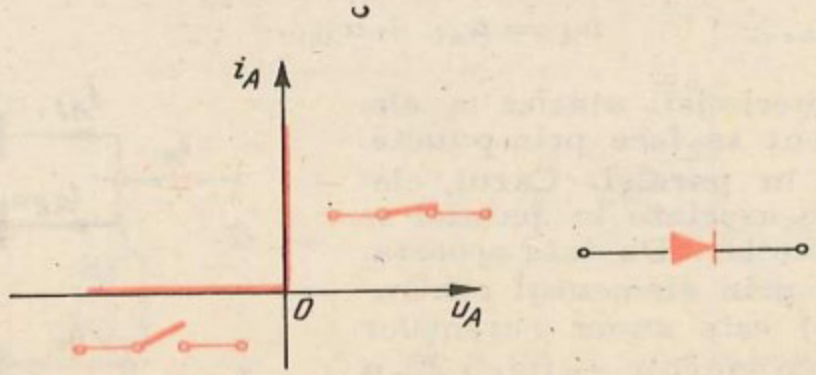


Fig. 5.21

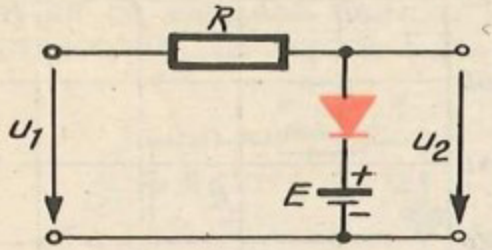


Fig. 5.22

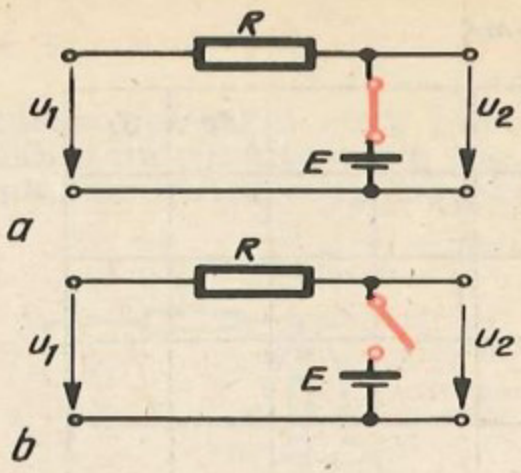
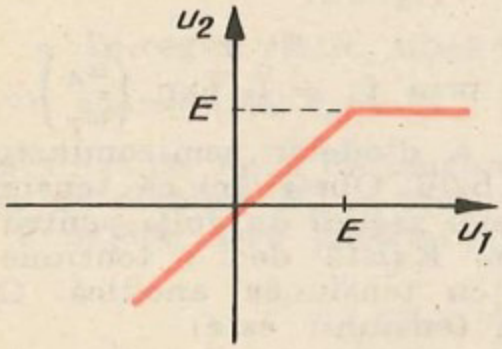


Fig. 5.23



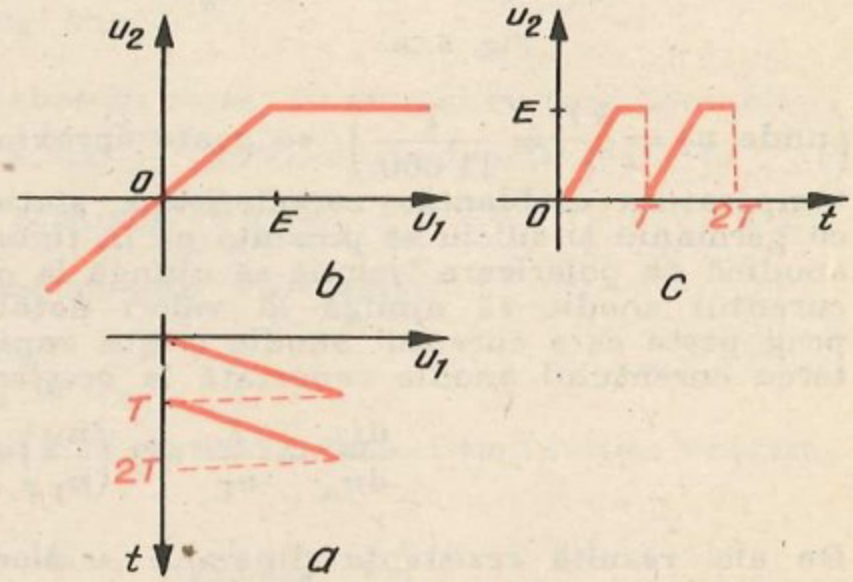


Fig. 5.24

Fig. 5.25

Aplicaţia 1. *Să se determine dependenţa tensiunii de ieşire u_2 de tensiunea de intrare u_1 pentru diportul din figura 5.22, dacă dioda semiconductoare este ideală.*

Starea diodei este determinată de tensiunea de intrare u_1. *Dacă* $u_1 > E$ dioda este polarizată în sens direct şi se comportă ca un întrerupător închis (fig. 5.23, *a*). Tensiunea u_2 rezultă egală cu tensiunea E la bornele sursei. *Dacă* $u_1 < E$, dioda este blocată şi se comportă ca un întrerupător deschis (fig. 5.23, *b*). Tensiunea u_2 este egală cu u_1. Dependenţa căutată este prezentată în figura 5.24.

○ **Notă.** Circuitul din figura 5.22 este un limitator de tensiune cu diodă.

Aplicaţia 2. *Tensiunea de intrare u_1 din circuitul din figura 5.22 variază în timp ca în figura 5.25. Să se deseneze forma de undă a tensiunii u_2.*

Tensiunea u_2 nu poate depăşi valoarea E (fig. 5.25, *b*). Pentru valori mai mici, tensiunea u_2 creşte liniar în timp ca şi tensiunea u_1 (fig. 5.25, *c*).

2. Modelul diodei cu sursă ideală de tensiune

Deoarece curentul de saturaţie I_s este mult mai mic decît curentul în conducţie directă, ecuaţia caracteristicii statice $i_A = I_s\left[\exp\left(\frac{u_A}{u_T}\right) - 1\right]$

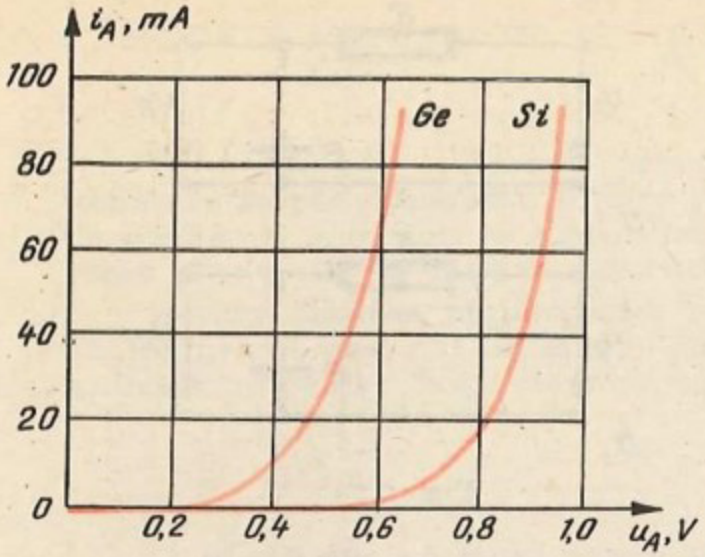


Fig. 5.26

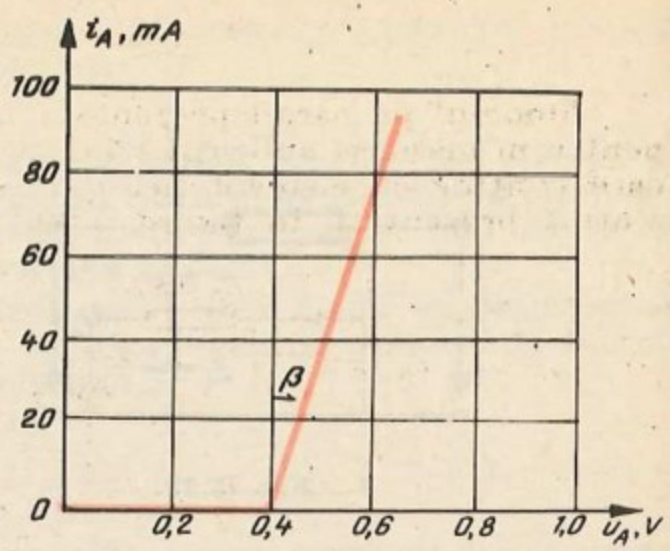


Fig. 5.27

$\left(\text{unde } u_T = \frac{kT}{e} = \frac{T}{11\,600}\right)$ se poate aproxima prin $i_A = I_s \exp\left(\frac{u_A}{u_T}\right)$. La temperatura ambiantă, caracteristica statică a diodelor semiconductoare cu germaniu şi siliciu se prezintă ca în figura 5.26. Observăm că tensiunea anodică de polarizare trebuie să ajungă la cîteva zecimi de volţi pentru ca curentul anodic să ajungă la valori notabile. Există deci o tensiune de prag peste care curentul anodic creşte rapid cu tensiunea anodică. Creşterea curentului anodic raportată la creşterea tensiunii este:

$$\frac{di_A}{du_A} = \frac{I_s}{u_T} \exp\left(\frac{u_A}{u_T}\right) = \frac{1}{u_T} i_A.$$

De aici rezultă rezistenţa dinamică a diodei, $r_d = \frac{du_A}{di_A} = \frac{u_T}{i_A}$, o mărime pozitivă dependentă de curentul anodic. Pentru un punct static de funcţionare (PSF) în care curentul este de 50 mA, rezistenţa dinamică este $r_d = \frac{25 \text{ mV}}{50 \text{ mA}} = 0{,}5 \ \Omega$.

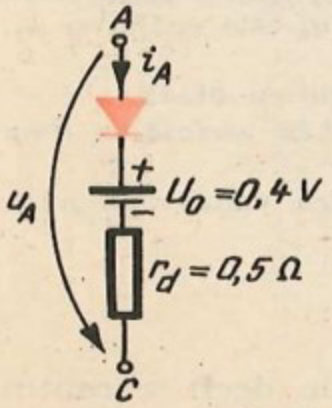


Fig. 5.28

Caracteristica statică a diodei cu germaniu prezentată în figura 5.26 poate fi liniarizată pe porţiuni ca în figura 5.27, respectiv:

$$\begin{cases} i_A = 0 \text{ pentru } u_A < 0{,}4 \text{ V}; \\ i_A = \frac{1}{r_d}(u_A - 0{,}4) \text{ pentru } u_A > 0{,}4 \text{ V}. \end{cases} \quad (5.11)$$

Pentru tensiuni anodice inferioare tensiunii de prag, dioda se prezintă ca un întrerupător deschis; *la tensiuni anodice peste valoarea de prag, dioda se modelează printr-o diodă ideală în serie cu o sursă de tensiune* de 0,4 V *şi cu o rezistenţă egală cu rezistenţa dinamică* determinată anterior (fig. 5.28).

3. Modelul diodei pentru semnal mic

Modelul pe care-l prezentăm în continuare prezintă o mare importanță pentru numeroase aplicații tehnice. Vom analiza un circuit simplu (fig. 5.29), care conține ca element neliniar o diodă semiconductoare cu caracteristica statică prezentată în figura 5.30.

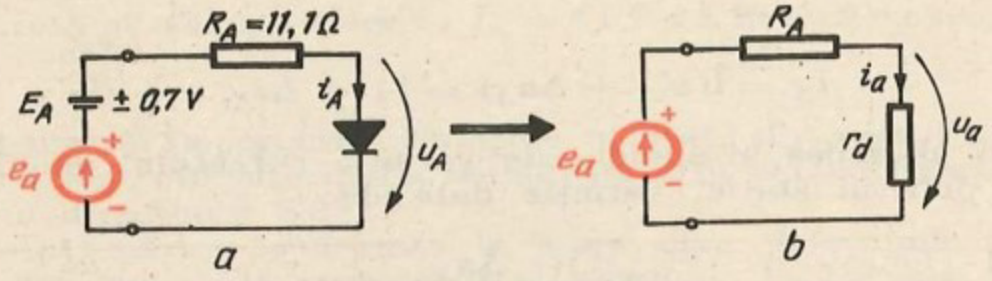


Fig. 5.29

• **În regim static,** adică în absența sursei de semnal cu tensiunea alternativă sinusoidală $e_a = 14,1\sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{T}t$(mV), dioda funcționează în PSF determinat de sursa de tensiune continuă cu t.e.m. $E_A = 0,7$ V și de rezistența de sarcină $R_A = 11,1\ \Omega$.

Ecuațiile care determină *coordonatele PSF* sînt:

$$\begin{cases} E_A = Ri_A + u_A \\ i_A = f(u_A) \end{cases}$$

La intersecția dreptei de sarcină cu graficul caracteristicii statice obținem $U_A = 0,43$ V și $I_A = 24$ mA.

Rezistența statică în PSF a diodei este:

$$R_{st} = \frac{U_A}{I_A} = \frac{0,43\ \text{V}}{24\ \text{mA}} \cong 18\ \Omega.$$

• **În regim dinamic, la semnale mici** (amplitudinea semnalului alternativ este mult mai mică decît tensiunea anodică în *PSF*), teorema a doua a lui Kirchhoff ne conduce la ecuația:

$$E_A + e_a = Ri_A + u_A. \qquad (5.12)$$

Tensiunea anodică poate fi scrisă sub forma:

$$u_A = U_A + \Delta u_A \qquad (5.13)$$

Δu_A fiind componenta dependentă de timp a tensiunii sau variația ei. Pentru

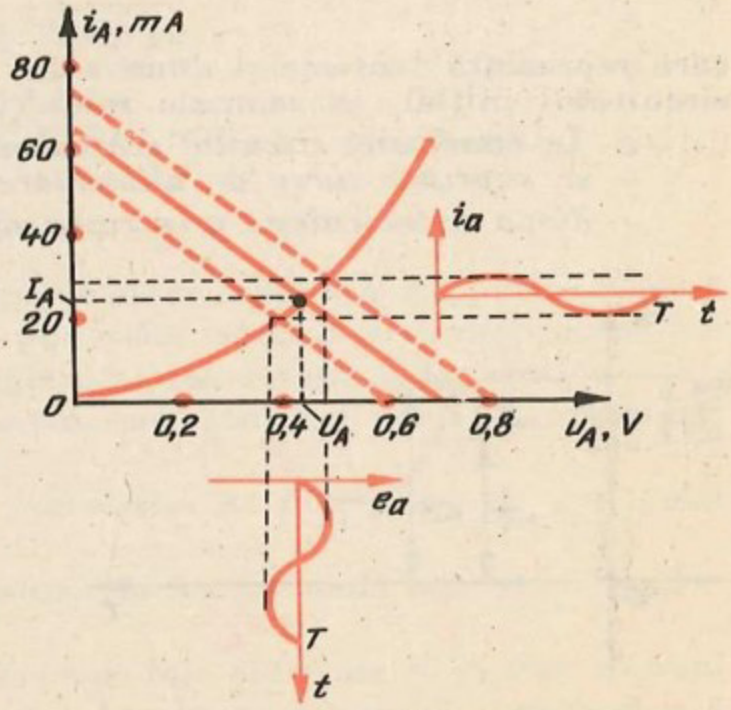


Fig. 5.30

amplitudini mici ale semnalului, variația Δu_A este o funcție de timp alternativă sinusoidală:

$$\Delta u_A = U_a \sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Curentul anodic la o valoare oarecare a tensiunii anodice se poate scrie sub forma:

$$i_A = f(U_A + \Delta u_A) = I_A + \Delta i_A, \tag{5.14}$$

unde termenul al doilea al sumei este variația curentului anodic față de valoarea din punctul static, variație dată de:

$$\Delta i_A = \frac{\Delta u_A}{r_d}.$$

Introducînd aceste mărimi în ecuația $E_A + e_a = Ri_A + u_A$ se obține:

$$E_A + e_a = RI_A + R\Delta i_A + U_A + \Delta u_A.$$

Deoarece $\Delta u_A = r_d \Delta i_A$ și $E_A = RI_A + U_A$, după reducerea termenilor obținem o *relație între variațiile tensiunii și curentului:*

$$e_a = R\Delta i_A + r_d \Delta i_A$$

sau, notînd $\Delta i_A = i_a$ și $\Delta u_A = u_a$

$$\boxed{e_a = Ri_a + r_d i_a} \tag{5.15}$$

care reprezintă teorema a doua a lui Kirchhoff pentru circuitul echivalent circuitului inițial, la semnale mici (fig. 5.29, *b*).

○ **În concluzie,** *circuitul echivalent la semnale mici se obține astfel:*

— *se suprimă sursa de alimentare în c.c.;*

— *dioda se înlocuiește prin rezistența dinamică calculată în punctul static.*

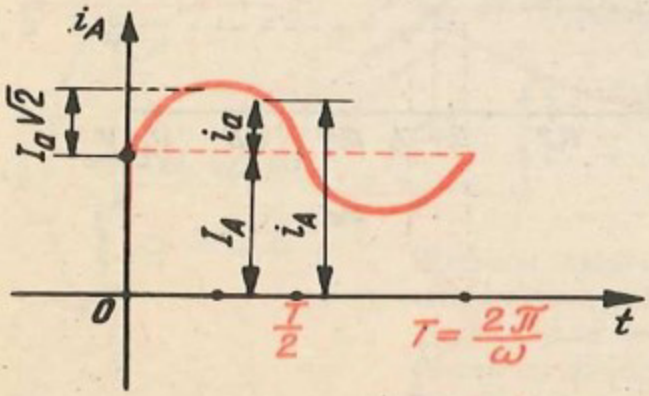


Fig. 3.31

Rezistența dinamică în punctul static se determină grafic cu relația de definiție, respectiv:

$$r_d = \left.\frac{du_A}{di_A}\right|_{PSF} \cong \left.\frac{\Delta u_A}{\Delta i_A}\right|_{PSF}$$

$$= \frac{(0{,}48 - 0{,}43)\ \text{V}}{(0{,}28 - 0{,}24)\ \text{mA}} =$$

$$= \frac{5}{4}\ \text{k}\Omega = 1{,}25\ \text{k}\Omega.$$

Componenta alternativă a curentului anodic este deci:

$$i_a = \frac{e_a}{R_A + r_d} = \frac{14{,}1\sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{T}t}{11{,}1 + 1\,250} = 11{,}1\sqrt{2}\sin\frac{2\pi t}{T}\,\mu A,$$

adică un curent cu valoare efectivă $I_a = 11{,}1\ \mu A$ în fază cu semnalul aplicat.

○ **Remarcă importantă!** Notaţiile utilizate sînt *notaţii standardizate* şi ca atare sînt obligatorii. Le reamintim deci pentru fixare, urmărind şi graficul din figura 5.31:

I_A, U_A sînt mărimi constante în timp care determină *PSF;*

i_a, u_a sînt variaţiile curentului şi tensiunii la bornele elementului neliniar faţă de valorile din *PSF;*

I_a, U_a sînt valorile efective ale acestor variaţii

$$i_a = I_a\sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{T}t\ ;$$

$$u_a = U_a\sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{T}t\ ;$$

i_A, u_A sînt valorile „totale", respectiv suma între mărimile de c.c. din *PSF* şi variaţiile lor în regim dinamic

$$i_A = I_A + \Delta i_A = I_A + i_a$$

E_A este t.e.m. a sursei de c.c. pentru fixarea *PSF;*

e_a este t.e.m. a sursei de semnal, de valoare efectivă E_a, respectiv

$$e_a = E_a\sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{T}t = E_a\sqrt{2}\sin\omega t.$$

D. UTILIZĂRI SPECIFICE ALE ELEMENTELOR NELINIARE

1. Redresarea tensiunilor alternative sinusoidale

Circuitele electronice, cu unele excepţii doar, necesită cel puţin o sursă de alimentare de c.c. pentru fixarea punctelor statice de funcţionare ale dispozitivelor neliniare în anumite porţiuni ale caracteristicilor statice.

O **sursă de alimentare de c.c.** conţine următoarele părţi componente, denumite şi **blocuri**:

— *partea de redresare a tensiunii alternative de la reţeaua de c.a. (bloc redresor);*

— *filtrul de netezire, destinat ameliorării formei de undă a tensiunii redresate;*

— *partea care realizează stabilizarea tensiunii redresate şi filtrate (blocul stabilizator)*, furnizînd la bornele de ieşire tensiunea continuă independentă de curentul de sarcină.

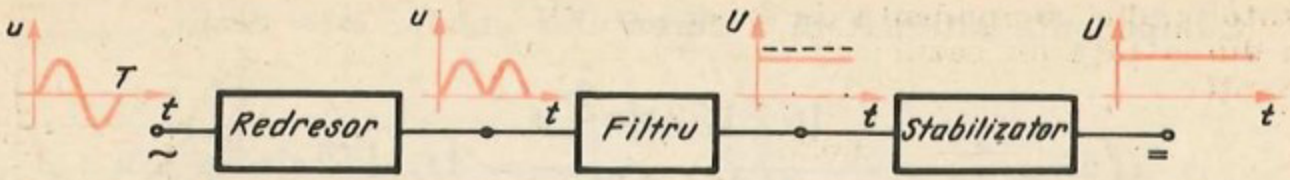


Fig. 5.32

În figura 5.32 sînt prezentate schematic părţile componente ale unei surse stabilizate şi formele de undă corespunzătoare ale tensiunii.

În cele ce urmează ne vom fixa atenţia asupra circuitelor de redresare şi stabilizare a tensiunii, în componenţa cărora intră elemente neliniare.

a. *Blocul redresor*

• **Cea mai simplă instalaţie de redresare** este cea reprezentată în figura 5.33, **compusă din** generatorul de c.a., diodă semiconductoare şi rezistenţa de sarcină.

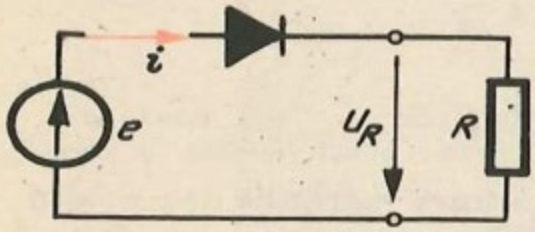


Fig. 5.33

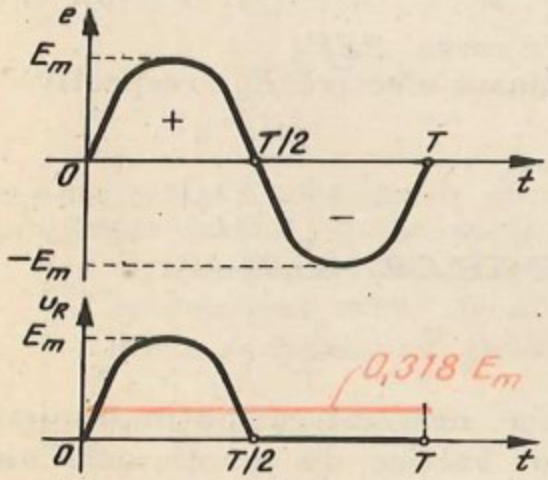


Fig. 5.34

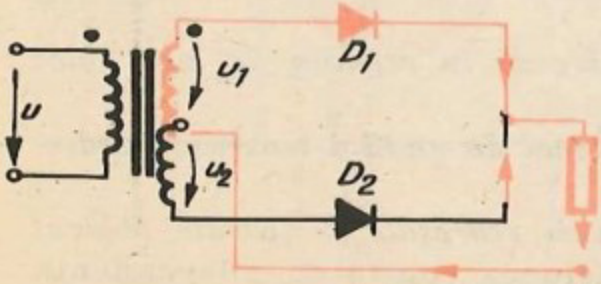


Fig. 5.35

Funcţionare. *În prima semiperioadă* a tensiunii electromotoare alternative sinusoidale, $e = E_m \sin \omega t$, dioda este polarizată în sens direct, iar curentul în circuit este:

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t.$$

Tensiunea la bornele rezistenţei de sarcină, $u_R = e - u_A$, este $u_R = e$ dacă dioda semiconductoare este ideală (fig. 5.34).

În semiperioada următoare, t.e.m. este negativă, iar dioda este blocată. Curentul în circuit şi tensiunea la bornele rezistenţei de sarcină sînt egale cu zero. În figura 5.34 se indică formele de undă ale t.e.m. şi tensiunii u_R numai pe durata unei perioade T, deoarece fenomenul este periodic.

Valoarea medie a tensiunii redresate (care este pulsatorie) sau „componenta de c.c." este

$$\tilde{u}_R = U_0 = \frac{E_m}{\pi} = 0{,}318\, E_m.$$

• Utilizarea unui transformator cu priză mediană şi a două diode semiconductoare permite **redresarea ambelor alternanţe** ale tensiunii alternative (fig. 5.35). Cele două tensiuni la bornele înfăşurării secundare sînt în opoziţie de fază (fig. 5.36), aşa încît cele două diode conduc pe rînd, pe durata cîte unei semiperioade. Tensiunea la bornele rezistenţei de sarcină rezultă tot

pulsatorie, dar componenta de curent continuu este dublă faţă de cazul redresorului monoalternanţă:

$$\mathcal{U}_R = \frac{2U_m}{\pi} = 0{,}636\ U_m.$$

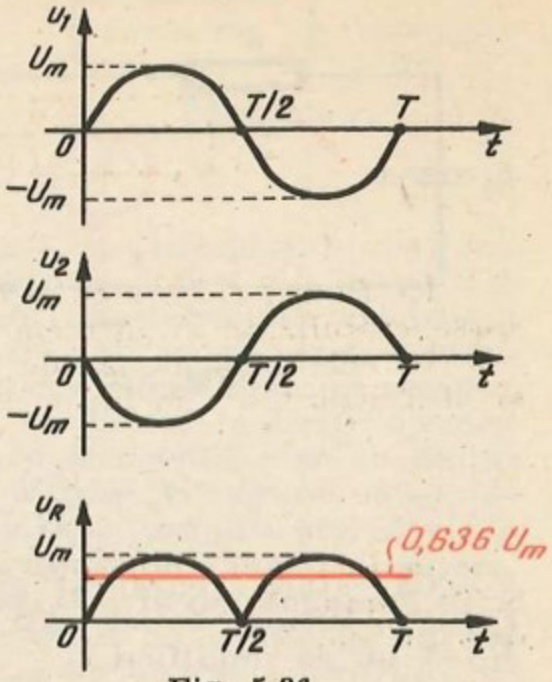


Fig. 5.36

b. *Blocul stabilizator*

• **Circuitul de stabilizare** a tensiunii la bornele rezistenţei de sarcină indicat în figura 5.37, *a* cuprinde sursa ideală de tensiune continuă cu t.e.m. $E_A = 20$ V, în serie cu o diodă Zener polarizată în sens invers şi cu o rezistenţă $R = 0{,}4$ kΩ pentru fixarea punctului static pe caracteristica diodei.

Caracteristica statică a diodei Zener prezintă în conducţie inversă o porţiune în care tensiunea de polarizare este $u_A = -U_z = -12$ V independentă de curent pentru un curent mai mic ca -2 mA.

• Pentru a urmări **funcţionarea circuitului** presupunem, pentru început, întreruptorul deschis, deci *regim static*. Punctul static de funcţionare este plasat la intersecţia dreptei de sarcină de ecuaţie:

$$E_A = -Ri_A - u_A$$

cu caracteristica statică a diodei,

$$i_A = \mathrm{f}(u_A).$$

Dreapta de sarcină intersectează axa tensiunii la tensiunea $u_{Ao} = -20$ V. Deoarece intersecţia cu axa curentului iese din cadrul figurii $\left(i_{Ao} = \frac{-20}{0{,}4} = \right.$ $= -50$ mA), al doilea punct al dreptei de sarcină se determină dînd curentului o valoare convenabilă. Dacă, de exemplu, $i_A = -10$ mA, obţinem $u_A = -20 + 0{,}4 \times 10 = -16$ V.

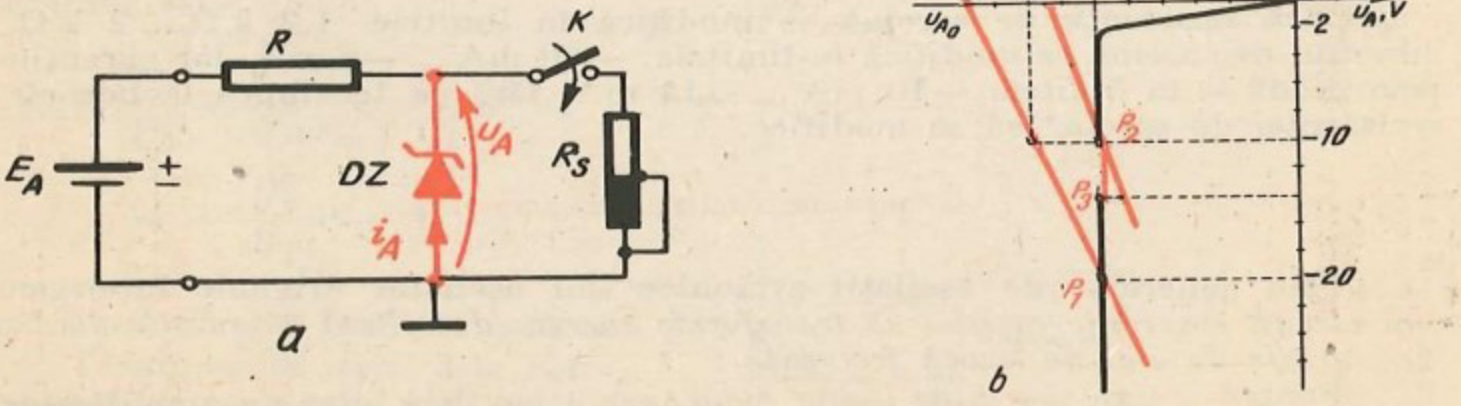


Fig. 5.37

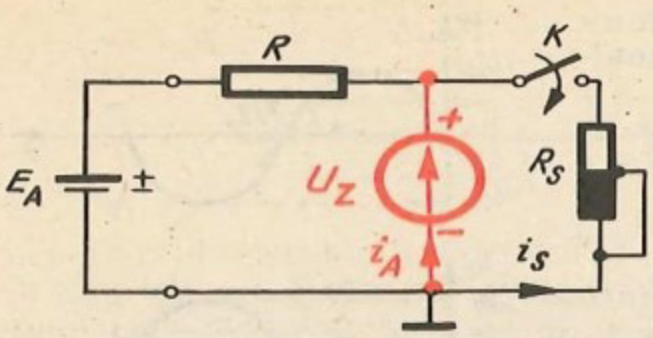


Fig. 5.38

Coordonatele punctului static de funcționare P_1 rezultă din grafic:

$$U_{A1} = -U_z = -12\,\text{V}; \; I_{A1} = -20\,\text{mA}.$$

Rezistența de sarcină R_s, care se conectează în circuit *la închiderea întrerupătorului*, este un reostat utilizat ca rezistență ajustabilă în limitele 0...2 kΩ. Dacă presupunem $R_s = 1{,}2\,\text{k}\,\Omega$, la tensiunea de −12 V curentul de sarcină, cu sensul de referință din figura 5.38 este:

$$I_s = \frac{U_{A1}}{R_s} = \frac{-U_z}{R_s} = \frac{-12\,\text{V}}{1{,}2\,\text{k}\,\Omega} = -10\,\text{mA}.$$

Ca atare, curentul prin dioda Zener crește de la $I_{A1} = -20$ mA la $I_{A2} = -10$ mA, astfel încît curentul prin sursă și prin rezistența de sarcină R_s să nu se modifice.

În regiunea considerată a caracteristicii, pentru curent invers $i_A \leqslant -2$ mA dioda Zener se comportă ca o sursă ideală de tensiune cu t.e.m. $U_z = -12$ V cu polaritatea indicată în figura 5.38. Generatorul echivalent față de terminalele diodei are tensiunea electromotoare

$$E'_A = E_A \frac{R_s}{R_s + R} = 20\frac{1{,}2}{1{,}2 + 0{,}4} = 15\,\text{V}$$

și rezistența internă

$$R' = \frac{R_s R}{R_s + R} = \frac{1{,}2 \times 0{,}4}{1{,}2 + 0{,}4} = 0{,}3\,\text{k}\,\Omega.$$

Noua dreaptă de sarcină are deci ecuația:

$$E'_A = -u_A - R' i_A,$$

care intersectează caracteristica statică a diodei, $i_A = \text{f}(u_A)$ în punctul static de funcționare P_2 de coordonate:

$$U_{A2} = -U_z = -12\ \text{V}; \; I_{A2} = -10\ \text{mA}\ \text{(fig. 5.37, } b\text{)}.$$

Dacă rezistența de sarcină se modifică în limitele 1,2 kΩ ... 2 kΩ, curentul de sarcină se modifică în limitele: −10 mA ... −6 mA, iar curentul prin diodă — în limitele −10 mA ... −14 mA, fără ca tensiunea la bornele rezistenței de sarcină să se modifice.

2. Generarea oscilațiilor armonice

Prin **generator de oscilații armonice** sau **oscilator armonic** înțelegem *un circuit electronic capabil să transforme energia dezvoltată de sursele de c.c. în energie de c.a. de înaltă frecvență.*

Pentru a fixa mai bine ideile, vom face o **paralelă între un amplificator și un oscilator,** referindu-ne la reprezentările simplificate din figura 5.39, în care prin săgeți s-a indicat sensul transferului de energie.

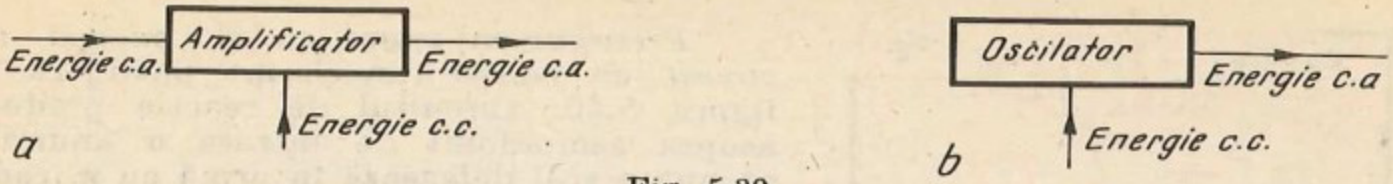


Fig. 5.39

• **Un amplificator** (fig. 5.39, *a*) este un circuit cu două perechi de borne de acces la exterior: bornele de intrare şi bornele de ieşire. La bornele de intrare se conectează o sursă de tensiune (curent) cu tensiunea electromotoare alternativă sinusoidală, de o frecvenţă dată, cu amplitudinea foarte mică (de ordinul milivolţilor). La bornele de ieşire se conectează un receptor de energie, să zicem un difuzor electromagnetic. Tensiunea la bornele receptorului este tot alternativă sinusoidală, cu aceeaşi frecvenţă, dar cu amplitudinea mult mai mare decît cea a tensiunii de intrare. Se spune că amplificatorul realizează o amplificare în tensiune. De fapt, amplificatorul realizează nu numai o amplificare în tensiune (sau curent), ci şi una în putere, în sensul că puterea transmisă receptorului în c.a. este mult mai mare decît puterea primită de amplificator de la sursa de semnal conectată la intrare. Această amplificare în putere se realizează pe seama energiei furnizată de sursele de c.c., care au şi rolul de fixare a punctelor statice de funcţionare ale componentelor electronice în regiunile liniare ale caracteristicilor statice.

• Spre deosebire de amplificator, **oscilatorul** (fig. 5.39, *b*) nu primeşte de la exterior energie de c.a. Energia furnizată la bornele de ieşire este energie de c.a., în general de frecvenţă mare în raport cu frecvenţa reţelei (50 Hz). Energia aceasta este primită de oscilator de la sursele de c.c. care, ca şi în cazul amplificatorului, servesc şi pentru fixarea punctelor statice de funcţionare ale dispozitivelor electronice ce intră în componenţa oscilatorului, în regiuni bine determinate ale caracteristicilor tensiune-curent.

• **Principiul reacţiei pozitive.** Principiile de funcţionare ale oscilatoarelor ca sisteme electronice autonome de generare a oscilaţiilor armonice sînt foarte numeroase. Ne vom limita la a prezenta unul dintre ele mai uşor de înţeles şi deseori utilizat în practică. Oscilatorul care funcţionează după acest principiu, denumit al reacţiei pozitive, este reprezentat simplificat în figura 5.40.

Amplificatorul de tensiune are semnalul de intrare u_1 şi semnalul de ieşire u_2 defazat cu π radiani în urmă (amplificator inversor). Amplificarea în tensiune a amplificatorului, $\underline{A}_u$, definită ca raport al imaginilor în complex ale celor două tensiuni este:

$$\underline{A}_u = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{U_2 e^{j\pi}}{U_1 e^{j0}} = \frac{U_2}{U_1} e^{j\pi} =$$

$$= -\frac{U_2}{U_1} = -A_u,$$

adică un număr real şi negativ.

Tensiunea la ieşire este condiţionată de prezenţa unei tensiuni la intrare.

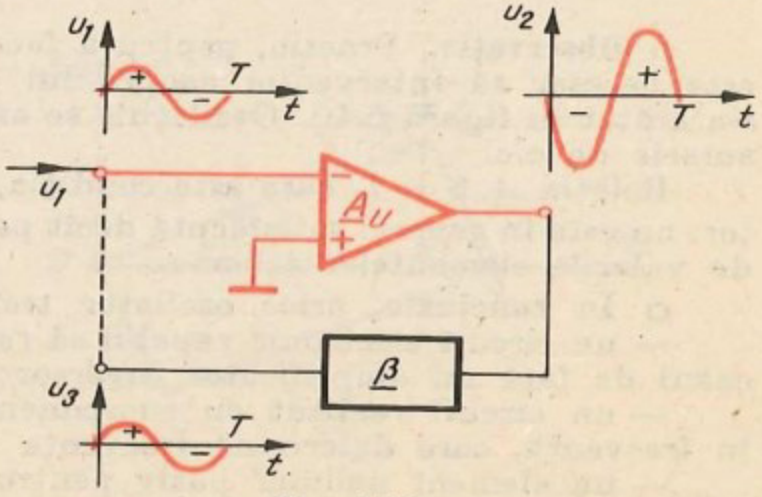


Fig. 5.40

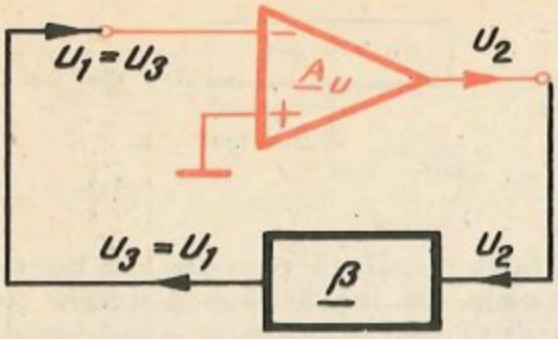


Fig. 5.41

Presupunem acum că se adaugă un circuit de reacție (un circuit pasiv) ca în figura 5.40. Circuitul de reacție produce asupra semnalului de intrare o anumită atenuare și îl defazează în urmă cu π radiani, astfel încît la ieșirea circuitului de reacție rezultă semnalul u_3 în fază cu cel de la intrarea amplificatorului (riguros vorbind, oscilațiile u_3 și u_1 sînt în fază deoarece defazajul total este de 2π rad).

Semnalul u_3 la ieșirea circuitului de reacție poate fi făcut identic cu semnalul la intrarea amplificatorului, caz în care semnalul u_1 poate fi suprimat și conecta împreună bornele de ieșire ale circuitului de reacție cu cele de intrare ale amplificatorului (fig. 5.41). Sistemul va continua să genereze un semnal de ieșire, alternativ sinusoidal. Amplificatorul continuă să aibă un semnal de intrare, dar acest semnal provine chiar din semnalul de la ieșire, transmis prin circuitul de reacție. Aceasta este reacția pozitivă.

Condiția de oscilație. Amplificarea totală a circuitului din figura 5.40, definită ca raport între $\underline{U}_3$ și $-\underline{U}_1$ $\left(\underline{A}_u = \dfrac{\underline{U}_3}{\underline{U}_1}\right)$ este egală cu unitatea, deoarece și pe calea de reacție se realizează o modificare a fazei cu π radiani.

Amplificarea aceasta este amplificarea căii formate din amplificator și circuitul de reacție. Dacă notăm cu $\underline{\beta}$ *funcția de transfer* a circuitului de reacție definită prin:

$$\underline{\beta} = \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2},$$

se observă că amplificarea căii este produsul $\underline{A}_u\,\underline{\beta}$ și este egală cu unitatea

$$\underline{\beta}\underline{A}_u = 1/\underline{0}.$$

Deoarece circuitul de reacție, realizat cu componente pasive (R, C), produce asupra semnalului o atenuare β, *oscilatorul armonic funcționează numai dacă amplificarea amplificatorului este cel puțin egală cu* $\dfrac{1}{\beta}$.

o **Observație.** Practic, pentru a face oscilatorul să producă oscilații nu este necesar să intervenim asupra lui cu un semnal de „start", așa cum s-a arătat în figura 5.40. Oscilațiile se amorsează de îndată ce se conectează sursele de c.c.

Relația $\underline{A}_u\underline{\beta} = 1$, care este condiția de amorsare a oscilațiilor în oscilator, nu este în general satisfăcută decît pentru o anumită frecvență f_0, impusă de valorile elementelor schemei.

o **În concluzie,** orice oscilator trebuie să conțină:

— un circuit electronic capabil să realizeze o amplificare în tensiune, în cazul de față un amplificator inversor;

— un circuit realizat cu componente pasive, cu comportare selectivă în frecvență, care determină frecvența de oscilație;

— un element neliniar pasiv pentru limitarea amplitudinii oscilațiilor;

— surse de alimentare de c.c.

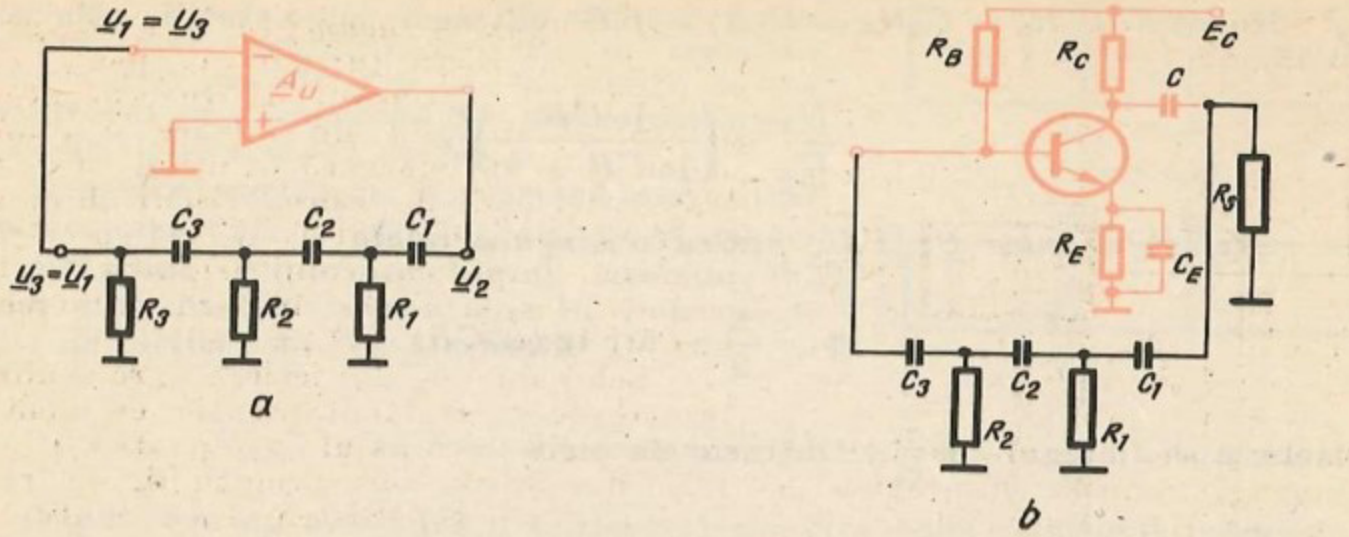


Fig. 5.42

O **schemă practică de oscilator** se prezintă ca în figura 5.42, *a*, unde circuitul de reacţie este realizat sub forma unui circuit în scară, *CR*.

Dacă amplificarea amplificatorului este negativă, circuitul generează oscilaţii cu frecvenţa egală cu frecvenţa la care defazajul introdus de circuitul *CR* este de π radiani. Celulele *CR* ale circuitului de defazare pot fi alese identice ($R_1 = R_2 = R_3$ şi $C_1 = C_2 = C_3$) sau cu valori care asigură pentru fiecare celulă o încărcare neglijabilă de către cea care îi urmează ($R_3 = 10R_2 = 100R_1$ şi $C_3 = 0{,}1C_2 = 0{,}01C_1$). În acest caz analiza este simplificată, deoarece se poate considera fiecare celulă (fig. 5.43, *a*) ca funcţionînd în gol şi realizînd un defazaj egal cu $\pi/3$ rad, aşa cum rezultă din diagrama fazorială din figura 5.43, *b*.

Funcţia de transfer a unei celule este

$$\frac{\underline{U}_e}{\underline{U}_i} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}$$

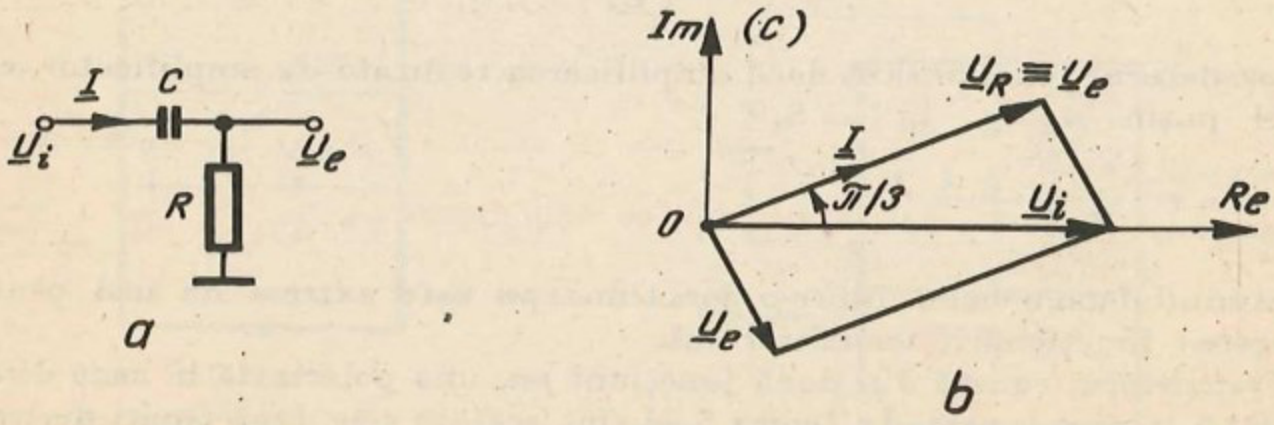


Fig. 5.43

şi deoarece $C_3R_3 = C_2R_2 = C_1R_1 = CR$ obţinem cu notaţiile din figura 5.42, *a*:

$$\frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2} = \left(\frac{j\omega CR}{j\omega CR + 1}\right)^3.$$

Defazajul între $\underline{U}_e$ şi $\underline{U}_i$ pentru o singură celulă

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg}\,(\omega_0 CR)$$

trebuie să fie egal cu $\frac{\pi}{3}$. Obţinem de aici:

$$\text{arc tg}\,(\omega_0 CR) = \frac{\pi}{6}\ \text{rad},$$

ω_0 fiind frecvenţa unghiulară a oscilaţiilor.

Deci, $\omega_0 CR = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577.$

Frecvenţa oscilaţiilor este:

$$f_0 = \frac{0{,}577}{2\pi RC} = \frac{1}{10{,}88\ RC}.$$

Atenuarea unei singure celule este:

$$\left|\frac{\underline{U}_e}{\underline{U}_i}\right| = \frac{\omega_0 CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} = \frac{0{,}577}{\sqrt{1 + 0{,}577^2}} \cong \frac{1}{2}$$

şi deci atenuarea circuitului de reacţie este

$$\beta = |\underline{\beta}| = \left|\frac{\underline{U}_e}{\underline{U}_i}\right|^3 = \frac{1}{8}.$$

Deci oscilatorul funcţionează dacă amplificarea realizată de amplificator este de cel puţin $A_u = |\underline{A}_u| = 8$.

3. Tranzistorul ca amplificator

Studiul fenomenelor dintr-o joncţiune *pn* este extrem de util pentru înţelegerea funcţionării tranzistorului.

Tranzistorul constă din două joncţiuni *pn*, una polarizată în sens direct şi cealaltă în sens invers. În figura 5.44 sînt arătate cele două tipuri de tranzistoare, *npn* şi *pnp*. Ele sînt astfel denumite după poziţia relativă a semi-

conductoarelor de tip *n* şi *p*: tranzistorul *npn* prezintă două regiuni de tip *n* separate printr-o regiune de tip *p*, în timp ce în tranzistorul *pnp* regiunea de tip *n* este încadrată de două regiuni de tip *p*.

Deoarece purtătorii de sarcină majoritari şi minoritari sînt diferiţi în cele două tipuri de materiale semiconductoare, mecanismul intern al conducţiei curentului în cele două tipuri de tranzistoare este diferit.

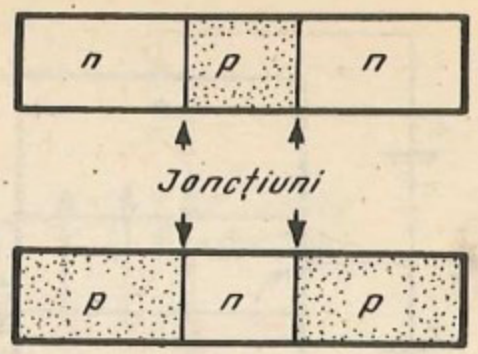


Fig. 5.44

a. *Funcţionarea tranzistoarelor npn*

După cum am mai spus, tranzistorul are cele două joncţiuni polarizate diferit.

• **Joncţiunea polarizată în sens direct** (fig. 5.45). De la început sînt necesare unele precizări referitoare la concentraţia relativă a atomilor de impurităţi în materialele joncţiunii. Semiconductorul de tip *n* al joncţiunii polarizate în sens direct este impurificat (dopat) mai puternic decît semiconductorul de tip *p*. Pentru acest motiv, *curentul prin joncţiune este datorat în principal traversării ei de către purtătorii majoritari ai regiunii de tip n (electroni)* şi nu de către ai celei de tip *p* (goluri).

○ **Notă.** Disproporţia între numărul de purtători de fiecare tip ce traversează joncţiunea nu este importantă în funcţionarea diodei, dar are mare importanţă în funcţionarea tranzistorului.

• **Joncţiunea polarizată în sens invers** (fig. 5.46) a mai fost examinată cu ocazia studiului conducţiei curentului în dioda semiconductoare. Am văzut atunci că joncţiunea polarizată în sens invers este traversată de un curent destul de mic (curentul invers), datorat deplasării purtătorilor minoritari. Pentru joncţiunea *pn* aceştia sînt electronii din regiunea *p* şi golurile din regiunea *n*.

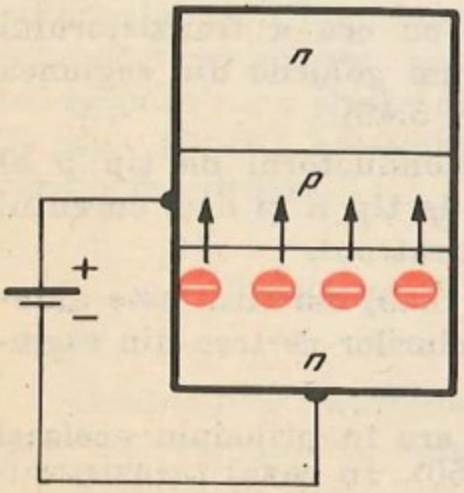


Fig. 5.45

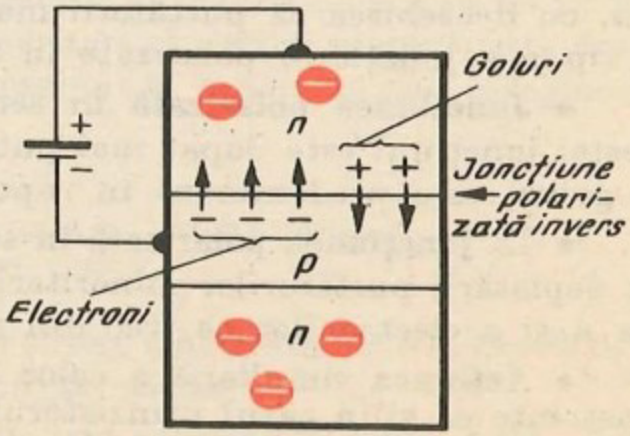


Fig. 5.46

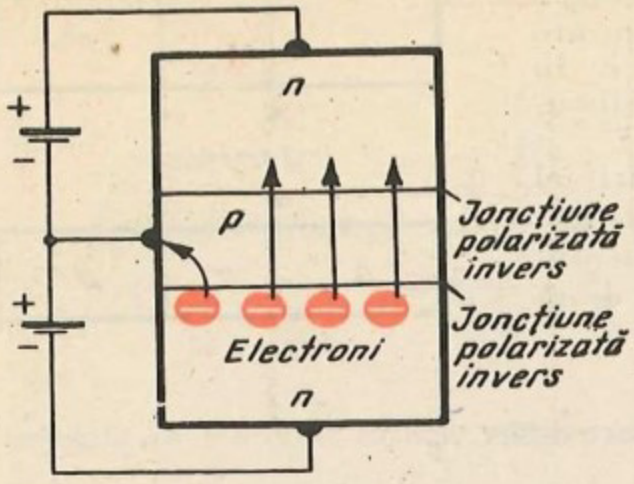


Fig. 5.47

• **Polarizarea simultană a celor două joncțiuni** este arătată în figura 5.47. Așa cum am arătat, joncțiunea polarizată în sens direct este traversată de electronii injectați din regiunea de tip *n* către cea de tip *p*. Regiunea de tip *p* în care pătrund acești electroni este totodată regiune de tip *p* pentru joncțiunea polarizată în sens invers. În regiunea *p* sînt disponibili pentru conducție cea mai mare parte dintre electronii veniți din regiunea *n* (excepție fac doar cei care se recombină cu golurile din această regiune) și purtătorii minoritari ai joncțiunii polarizate în sens invers.

Datorită grosimii foarte mici a regiunii de tip *p*, numărul de electroni care se recombină cu golurile din această regiune este neînsemnat.

Electronii au tendința să se deplaseze în sensul în care potențialul electric crește (energia lor potențială descrește), sens impus de polaritatea sursei de curent continuu care polarizează cea de-a doua joncțiune.

Prin modificarea tensiunii de polarizare se modifică debitul de electroni ce traversează joncțiunea polarizată în sens direct, deci numărul de electroni disponibili pentru condiția curentului prin joncțiunea polarizată în sens invers.

Mecanismul intern al conducției curentului în tranzistorul *npn* va ieși și mai pregnant în evidență cînd tranzistorul va fi considerat element de circuit.

b. *Funcționarea tranzistoarelor pnp*

Funcționarea tranzistorului *pnp* este similară cu cea a tranzistorului *npn*, cu deosebirea că purtătorii majoritari sînt acum golurile din regiunea de tip *p* a joncțiunii polarizate în sens direct (fig. 5.48).

• **Joncțiunea polarizată în sens direct.** Semiconductorul de tip *p* al acestei joncțiuni este dopat mai puternic decît cel de tip *n* și deci curentul de goluri este predominant în raport cu cel de electroni.

• **În joncțiunea polarizată în sens invers** (fig. 5.49) curentul este datorat deplasării purtătorilor minoritari, respectiv a golurilor ce trec din regiunea *n* și a electronilor ce trec din regiunea *p*.

• **Acțiunea simultană a celor două joncțiuni** are în principiu aceleași consecințe ca și în cazul tranzistorului *npn* (fig. 5.50). În cazul tranzistorului *pnp*, prin joncțiunea polarizată în sens direct se injectează goluri din regiunea *p* în regiunea *n*.

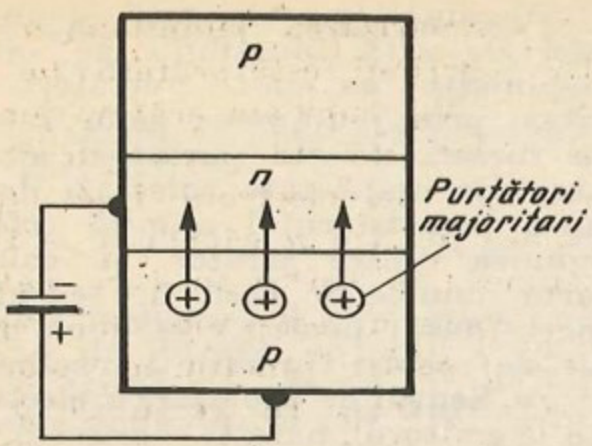


Fig. 5.48

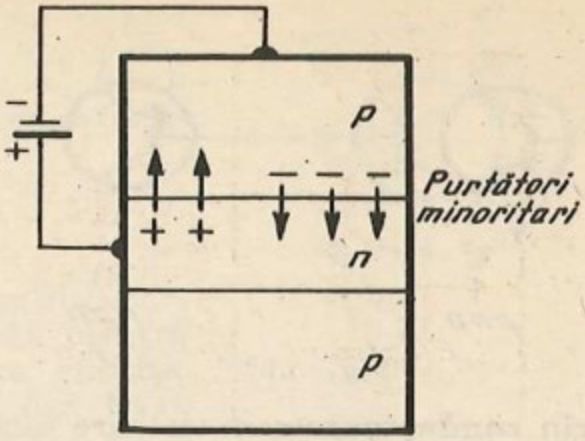


Fig. 5.49

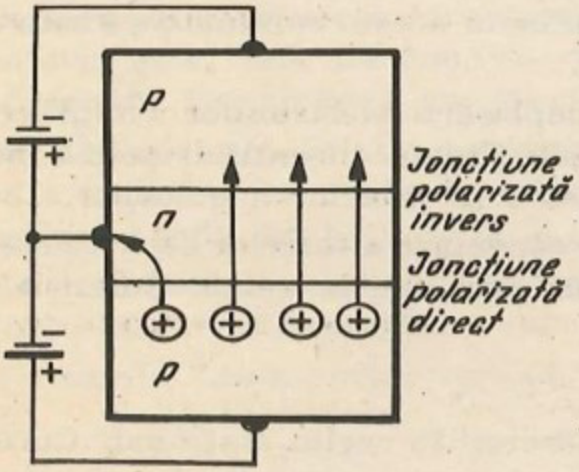


Fig. 5.50

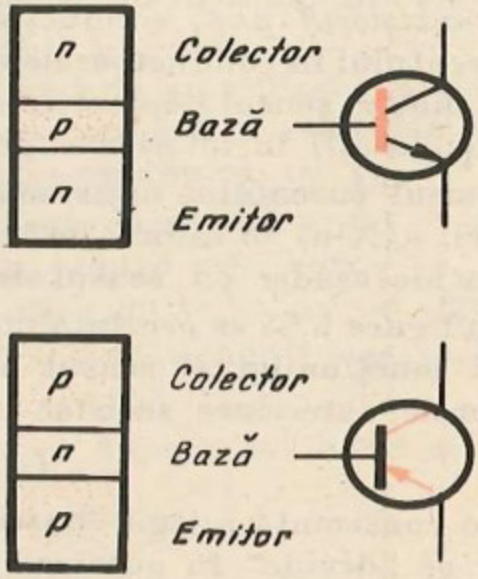


Fig. 5.51

Odată ajunse în regiunea *n*, golurile sînt disponibile pentru conducția curentului prin joncțiunea polarizată în sens invers, împreună cu purtătorii minoritari ai acestei regiuni. Numărul relativ al golurilor care se recombină în regiunea *n* cu electronii (purtători majoritari ai acestei regiuni) este destul de mic datorită grosimii mici a acestei regiuni în raport cu cea a regiunilor care o încadrează.

c. *Simboluri. Terminologie. Funcționarea tranzistorului conectat într-un circuit*

Simbolurile tranzistoarelor de tip *npn* și *pnp* sînt prezentate în figura 5.51. Cele trei regiuni se numesc *emitor*, *bază* și *colector*.

Joncțiunea polarizată în sens direct este *joncțiunea emitor-bază*. *Joncțiunea bază-colector* este polarizată în sens invers.

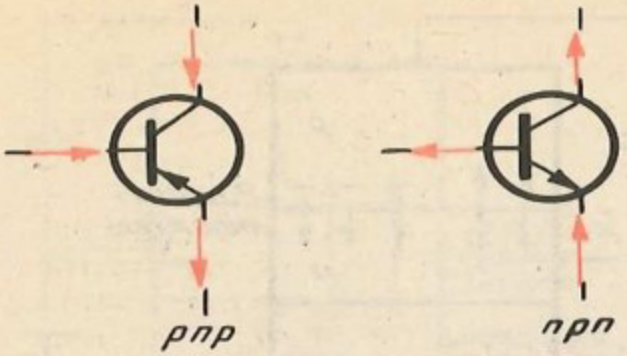


Fig. 5.52

Regiunea emitor este denumită astfel datorită funcţiunii pe care o îndeplineşte: ea emite purtători majoritari prin joncţiunea polarizată în sens direct. Aceşti purtători sînt în marea lor majoritate colectaţi de regiunea tranzistorului numită *colector*. Regiunea dintre emitor şi colector poartă numele de *bază* în sensul de suport (bază) pentru cele două materiale de acelaşi tip care o încadrează.

• **Sensul de deplasare a electronilor prin conductoarele exterioare** racordate la emitorul, baza şi colectorul unui tranzistor sînt indicate în figura 5.52.

Pentru tranzistorul npn, unde purtătorii majoritari sînt electronii, deplasarea lor prin conductoarele exterioare este o continuare a deplasării interne.

În tranzistorul pnp, conducţia internă este conducţie de goluri. Conducţia curentului în conductoarele exterioare este însă o conducţie electronică. Din acest motiv, sensul deplasării electronilor în aceste conductoare este opus sensului deplasării în interior a golurilor.

• **Sensul curentului** opus sensului deplasării electronilor (v. „Electrotehnica“ cl. a X-a) se indică în figura 5.53. Sensul curentului prin conductoare coincide aşadar cu sensul de deplasare în interior a golurilor.

• În figura 5.54 se prezintă **modul de conectare a surselor de c.c. necesare polarizării joncţiunilor şi sensul curenţilor** prin aceste surse. Curenţii prin conductoarele exterioare satisfac relaţia:

$$I_E = I_B + I_C \,,$$

care este o consecinţă a legii conservării sarcinii în regim staţionar. Curentul de emitor se „divide“ în curentul de colector şi curentul de bază.

La rîndul său, curentul de colector este dependent de curentul de bază. Cu cît debitul purtătorilor majoritari injectaţi în bază este mai mare (I_E este mai mare) cu atît curentul de bază este mai mare şi în consecinţă este mai mare şi curentul de colector. Între cei doi curenţi există relaţia:

$$I_C = \beta I_B$$

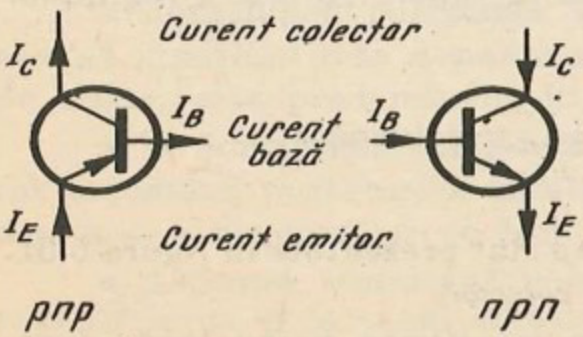


Fig. 5.53

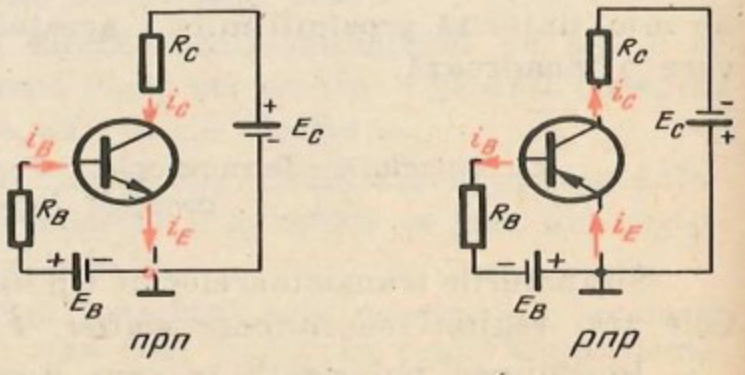


Fig. 5.54

unde β este *cîştigul în curent* sau *factorul de amplificare al curentului de bază*. Posibilitatea de a „controla" curentul de colector prin curentul de bază este fundamentală pentru funcţionarea tranzistorului ca amplificator.

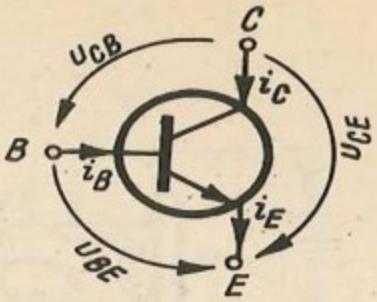


Fig. 5.55

d. *Tipuri de conexiuni*

Cînd tranzistorul este folosit ca amplificator, semnalul de intrare se aplică între două dintre cele trei terminale. Semnalul de ieşire va rezulta şi el între două dintre cele trei terminale, aşa încît unul dintre terminale este comun.

Circuitele prezentate în figura 5.54 sînt *circuite cu emitor comun*. Se pot utiliza funcţie de scopul urmărit şi alte configuraţii: *cu bază comună* sau *cu colector comun*. Configuraţia fundamentală pentru funcţiunea de amplificator este însă cea cu emitorul comun.

Înainte de a prezenta structura circuitului de amplificare şi funcţiunile elementelor sale, este necesară o prezentare sumară a **relaţiilor tensiune-curent pentru tranzistorul cu joncţiuni, în conexiunea cu emitor comun.**

• **Regim static.** Fiind un element de circuit cu trei borne de acces, starea statică a tranzistorului este determinată de curenţii prin borne i_E, i_B, i_C şi de tensiunile între borne u_{CE}, u_{BE} şi u_{CB}, aşa cum se indică în figura 5.55.

Cei trei curenţi satisfac prima teoremă a lui Kirchhoff, aşa încît numai doi dintre ei sînt independenţi.

Tensiunile între borne verifică teorema a doua a lui Kirchhoff:

$$u_{CB} + u_{BE} - u_{CE} = 0$$

şi deci numai două dintre ele sînt independente.

Mărimile care se aleg pentru caracterizarea stării de conducţie a tranzistorului în configuraţia emitor comun sînt curenţii i_B şi i_C şi tensiunile u_{BE} şi u_{CE}. Dintre aceste mărimi, două pot fi considerate variabile independente, iar celelalte două — variabile dependente.

Dacă variabilele independente sînt i_B şi u_{CE}, putem scrie relaţiile:

$$\begin{aligned} i_C &= f(i_B, u_{CE}) \\ u_{BE} &= g(i_B, u_{CE}) \end{aligned}$$

care definesc *familiile de caracteristici statice de ieşire* şi respectiv *de intrare* ale tranzistorului.

Familia caracteristicilor de ieşire se determină experimental utilizînd circuitul din figura 5.56 în care sînt introduse instrumente de măsură pentru curentul de bază, curentul de colector, tensiunea de colector şi tensiunea de bază. Pentru o valoare dată a curentului i_B se determină curentul de colector

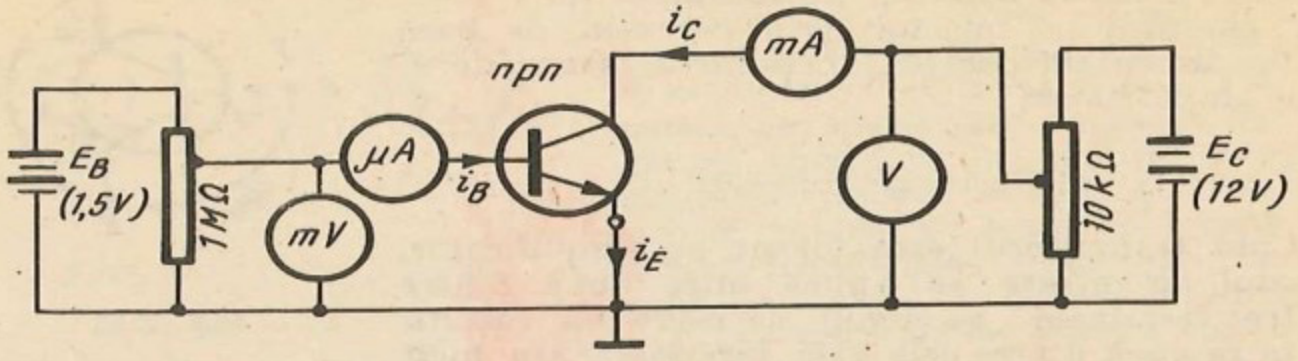


Fig. 5.6.6

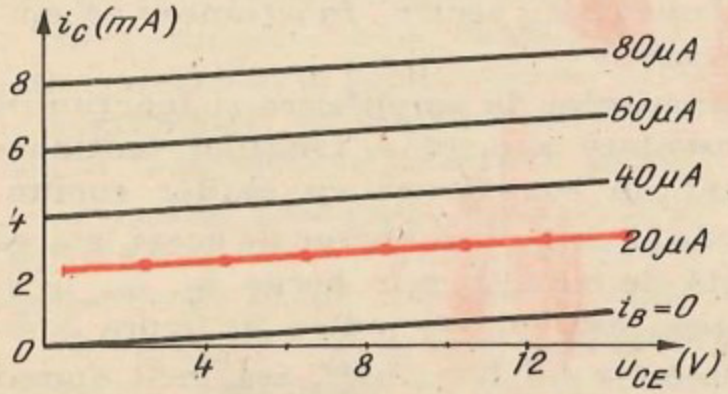


Fig. 5.57

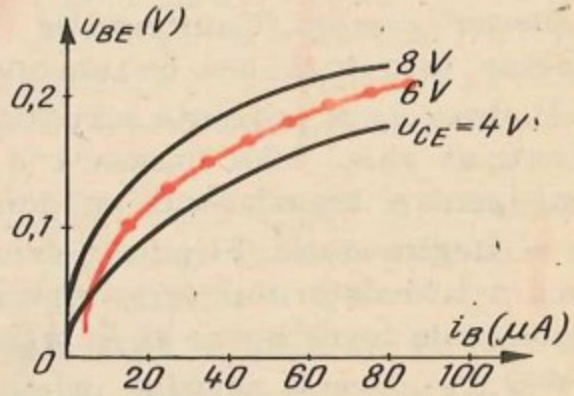


Fig. 5.58

la valori crescătoare ale tensiunii u_{CE}. În figura 5.57 se prezintă familia caracteristicilor de ieşire pentru valori ale curentului de bază ce cresc în progresie aritmetică.

Procedînd similar se determină şi familia de *caracteristici de intrare*, prezentate în figura 5.58.

• **Regim dinamic.** Datorită faptului că tranzistorul este un element neliniar, relaţiile dintre componentele variabile în timp ale tensiunilor şi curenţilor vor fi în general neliniare şi numai în anumite condiţii aceste relaţii se pot liniariza, ceea ce înseamnă că numai în anumite condiţii semnalul de ieşire va depinde liniar de semnalul de intrare. O asemenea comportare prezintă o mare importanţă practică în realizarea amplificatoarelor de semnal.

e. *Circuitul echivalent al tranzistorului la semnale mici*

Cea mai simplă schemă de amplificator cu un tranzistor se prezintă în figura 5.59, unde pentru fixarea punctului static de funcţionare se utilizează două surse de c.c., E_B şi E_C.

Sursa de semnal, cu t.e.m. alternativă sinusoidală, $e = E\sqrt{2}\sin \omega t$, se introduce în circuitul de polarizare a bazei. În absenţa acestei surse,

tranzistorul se află într-o stare statică determinată de t.e.m. E_B și E_C și de rezistențele R_B și R_C.

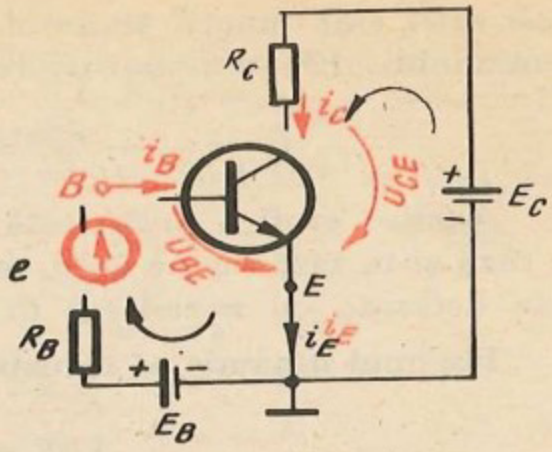


Fig. 5.59

• **Punctul static de funcționare** se fixează în regiunea liniară a familiei de caracteristici statice, așa cum se va arăta în continuare. Fie I_B, I_C, U_{CE} și U_{BE} curenții și respectiv tensiunile în starea statică considerată.

• Prezența semnalului alternativ sinusoidal modifică valorile curenților și tensiunilor în jurul valorilor din *PSF*, așa cum se arată în figura 5.60. În acest nou regim, denumit **regim dinamic,** curenții și tensiunile se prezintă sub forma:

$$i_B = I_B + i_b$$
$$i_C = I_C + i_c$$

și respectiv

$$u_{CE} = U_{CE} + u_{ce}$$
$$u_{BE} = U_{BE} + u_{bc}$$

unde se pun în evidență valorile din punctul static și variațiile i_b, i_c, u_{bc} și u_{bc} față de aceste valori. Variațiile respective, în regimul dinamic la *sem-*

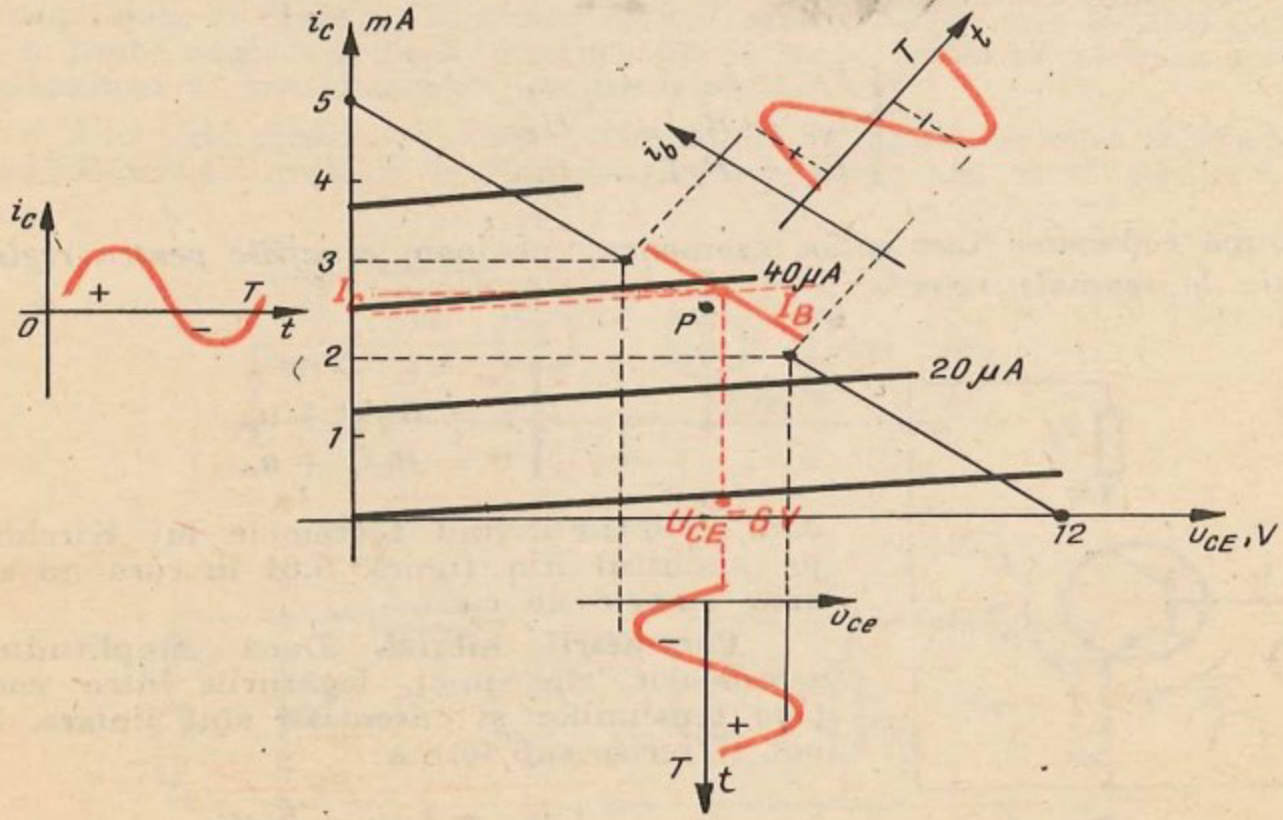


Fig. 5.60

nale mici sînt funcţii sinusoidale de timp, cu frecvenţa egală cu frecvenţa semnalului. Ele mai pot fi scrise şi astfel:

$$i_b = i_B - I_B = \Delta i_B;\ i_c = i_C - I_C = \Delta i_c \text{ etc.}$$

Analiza grafică prezentată în figura 5.60 arată că i_c şi i_b sînt mărimi în fază şi în fază cu t.e.m. e, în timp ce variaţia u_{ce} a tensiunii de colector este defazată cu π radiani în urma acestei t.e.m.

Regimul dinamic al tranzistorului este descris de ecuaţiile:

$$\begin{cases} i_E = i_C + i_B; \\ e + E_B = R_B i_B + u_{BE}; \\ E_C = R_C i_C + u_{CE}, \end{cases}$$

care rezultă scriind teoremele lui Kirchhoff în circuitul din figura 5.59.

Înlocuind în aceste ecuaţii expresiile de mai sus, obţinem:

$$\begin{cases} I_E + i_e = I_C + i_c + I_B + i_b; \\ e + E_B = R_B I_B + R_B i_b + U_{BE} + u_{be}; \\ E_C = R_C I_C + R_C i_c + U_{CE} + u_{ce}. \end{cases}$$

Aceste relaţii pot căpăta o formă simplă, în care intervin numai variaţiile ce definesc regimul dinamic, deoarece între mărimile ce definesc regimul static sînt adevărate relaţiile:

$$\begin{cases} I_E = I_C + I_B \\ E_B = R_B I_B + U_{BE} \\ E_C = R_C I_C + U_{CE}. \end{cases}$$

După reducerea termenilor asemenea, obţinem *ecuaţiile pentru regimul dinamic la semnale mici:*

$$\begin{cases} i_e = i_c + i_b \\ e = R_B i_b + u_{be} \\ 0 = R_C i_c + u_{ce} \end{cases}$$

care se obţin scriind teoremele lui Kirchhoff pe circuitul din figura 5.61 în care nu mai apar sursele de c.c.

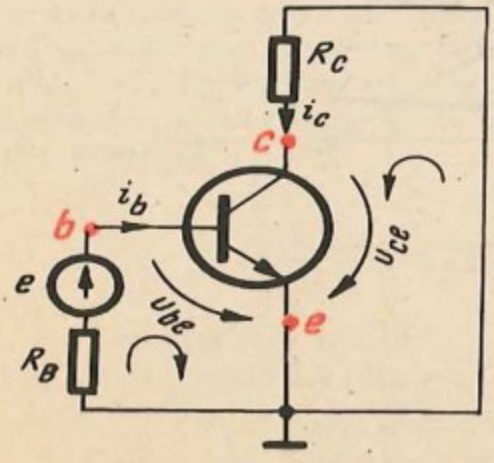


Fig. 5.61

Parametrii hibrizi. Dacă amplitudinile semnalelor sînt mici, legăturile între variaţiile tensiunilor şi curenţilor sînt liniare. Ele pot fi scrise sub forma:

$$\begin{cases} u_{be} = h_{ie} i_b + h_{re} u_{ce} \\ i_c = h_{fe} i_b + h_{oe} u_{ce} \end{cases}$$

Ecuaţia $u_{be} = h_{ie} i_b + h_{re} u_{ce}$ reprezintă teorema a doua a lui Kirchhoff în poarta de intrare. Cea de-a doua ecuaţie, $i_c = h_{fe} i_b + h_{oe} u_{ce}$ reprezintă prima teoremă a lui Kirchhoff în poarta de ieşire.

Coeficienţii h_{ie}, h_{re}, h_{fe} şi h_{oe}, denumiţi *parametri hibrizi*, se definesc astfel:

$$h_{ie} = \left.\frac{u_{be}}{i_b}\right|_{u_{ce}=0} = \left.\frac{\Delta u_{BE}}{\Delta i_B}\right|_{\Delta u_{CE}=0} = \left.\frac{\Delta u_{BE}}{\Delta i_B}\right|_{u_{CE}=const.}$$

$$h_{re} = \left.\frac{u_{be}}{u_{ce}}\right|_{i_b=0} = \left.\frac{\Delta u_{BE}}{\Delta u_{CE}}\right|_{\Delta i_B=0} = \left.\frac{\Delta u_{BE}}{\Delta u_{CE}}\right|_{i_B=const.}$$

$$h_{fe} = \left.\frac{i_c}{i_b}\right|_{u_{ce}=0} = \left.\frac{\Delta i_C}{\Delta i_B}\right|_{\Delta u_{CE}=0} = \left.\frac{\Delta i_C}{\Delta i_B}\right|_{u_{CE}=const.}$$

$$h_{oe} = \left.\frac{i_c}{u_{ce}}\right|_{i_b=0} = \left.\frac{\Delta i_C}{\triangle u_{CE}}\right|_{\Delta_{iB}=0} = \left.\frac{\Delta i_C}{\Delta u_{CE}}\right|_{i_B=const.}$$

Semnificaţia acestor parametri rezultă imediat din schema echivalentă sub formă de diport a tranzistorului, indicată în figura 5.62:

— h_{ie} este impedanţa de intrare *(input)* cu bornele de ieşire c, e în scurtcircuit;

— h_{re} este factorul de transfer invers *(reverse)* în tensiune;

— h_{fe} este factorul de transfer direct *(forward)* în curent;

— h_{oe} este admitanţa de ieşire *(output)* cu intrarea în gol.

După cum se observă, în aceste notaţii primul indice este iniţiala cuvîntului în limba engleză indicat între paranteze, iar al doilea se referă la modul de conexiune al tranzistorului (emitor comun).

• Adoptînd pentru tranzistor acest model de diport, **schema echivalentă a amplificatorului** indicată în figura 5.62 se completează ca în figura 5.63,

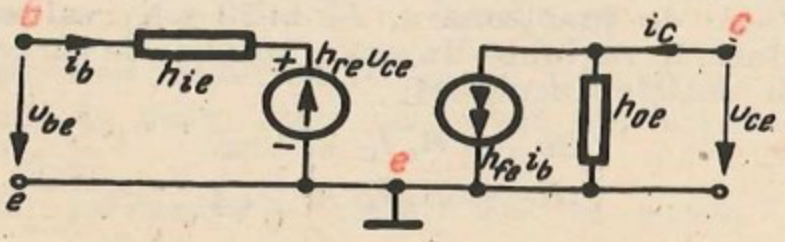


Fig. 5.62

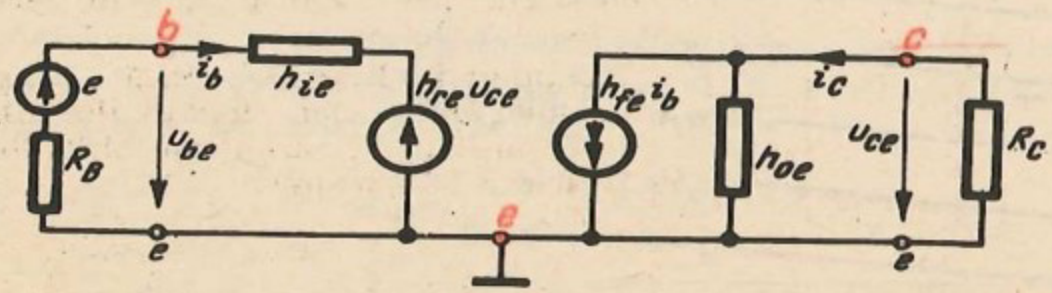


Fig. 5.63

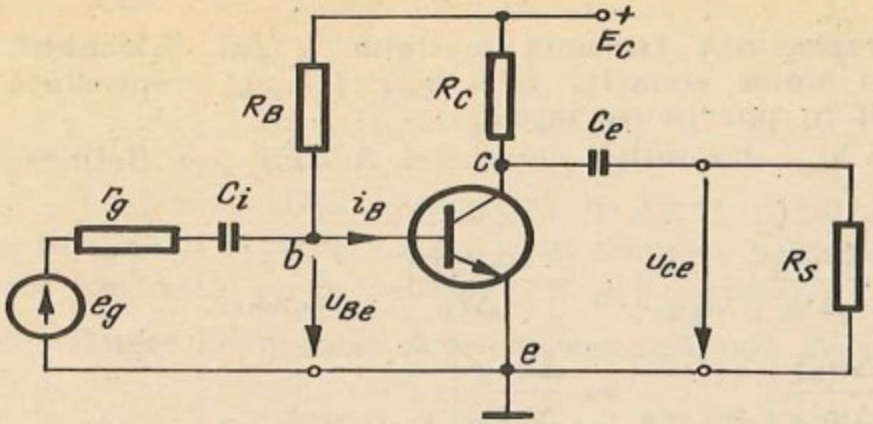


Fig. 5.64

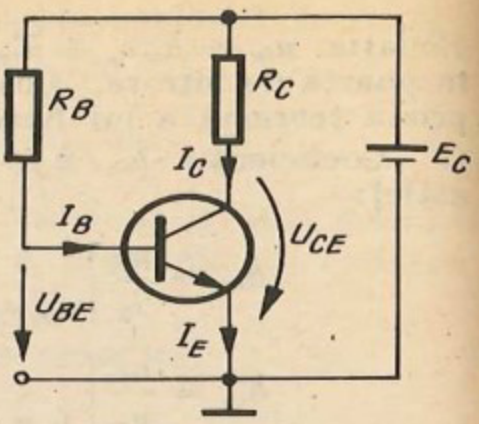


Fig. 5.65

iar sistemul de curenţi care definesc parametrii hibrizi se completează cu ecuaţiile:

$$\begin{cases} u_{be} = e - R_B i_b; \\ u_{ce} = -R_C i_c. \end{cases}$$

Din acest sistem de ecuaţii se obţine amplificarea în tensiune a amplificatorului, $A_u = \dfrac{u_{ce}}{u_{be}}$.

f. *Etajul de amplificare cu un tranzistor*

Un etaj practic de amplificare în care pentru fixarea punctului static de funcţionare se foloseşte o singură sursă de c.c. se indică în figura 5.64. Regimul static al tranzistorului se determină pe circuitul fără sursa de semnal, redat separat în figura 5.65.

Tranzistorul utilizat, de tip *npn* cu germaniu, are familia de caracteristici de ieşire indicate în figura 5.60.

• **Calculul elementelor schemei.** Să presupunem cunoscut curentul de bază în punctul static de funcţionare, $I_B = 50$ μA, valoare ce corespunde poziţiei punctului static în regiunea liniară a familiei de caracteristici. Curenţii de bază şi colector satisfac ecuaţiile

$$\begin{cases} E_C = R_C I_C + U_{CE}; \\ E_C = R_B I_B + U_{BE}. \end{cases}$$

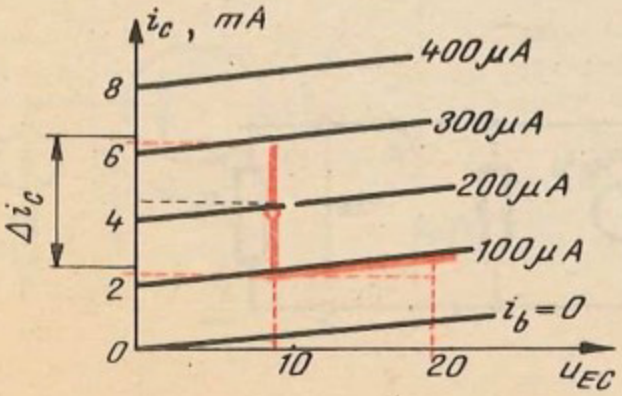


Fig. 5.66

Pentru tranzistorul cu germaniu putem considera $U_{BE} \cong 0{,}3$ V. Obţinem astfel pentru *rezistenţa din circuitul de bază* valoarea:

$$R_B = \frac{E_C}{I_B} = \frac{12 \text{ V}}{60 \ \mu\text{A}} = 0{,}2 \text{ M}\Omega = 200 \text{ k}\Omega.$$

Dacă cîştigul în curent al tranzistorului este $\beta = 50$, obţinem pentru curentul de colector valoarea:

$$I_C = \beta I_B = 50 \times 60 \ \mu\text{A} = 3\,000 \ \mu\text{A} = 3 \text{ mA}.$$

Cu aceste valori rezultă pentru tensiunea colector-emitor valoarea $U_{CE} = 6$ V. *Rezistenţa din colector* este atunci:

$$R_C = \frac{E - U_{CE}}{I_C} = \frac{(12 - 6) \text{ V}}{3 \text{ mA}} = 2 \text{ k}\Omega.$$

Condensatoarele C_i şi C_e au rolul de a împiedica trecerea curentului continuu prin sursa de semnal şi respectiv prin rezistenţa de sarcină. La frecvenţa de lucru, aceste condensatoare trebuie să prezinte însă impedanţe neglijabile, spre a nu influenţa funcţionarea amplificatorului în curent alternativ.

• **Calculul amplificării.** Pentru a pune în evidenţă funcţiunea de amplificare a semnalelor alternative sinusoidale, să urmărim analiza grafică din figura 5.60.

Semnalul alternativ determină un curent de bază cu amplitudinea de 20 μA. Variaţia curentului de bază are loc în lungul dreptei de sarcină* şi determină concomitent variaţii ale curentului de colector cu amplitudinea de aproximativ 0,6 mA şi ale tensiunii de colector cu amplitudinea în jur de 1,2 V.

o **Este de remarcat faptul că** tensiunea de colector are variaţia opusă variaţiei curentului de bază. Între cele două mărimi sinusoidale există un defazaj de π radiani.

Amplificatorul realizează o *amplificare în curent*

$$A_I = \frac{I_c}{I_b} = \frac{0{,}6 \text{ mA}}{20 \ \mu\text{A}} = 30.$$

Dacă presupunem o rezistenţă de intrare de 1 kΩ, amplitudinea semnalului de tensiune la intrarea amplificatorului va fi de 1 kΩ × 20 μA = 20 mV şi deci *amplificarea în tensiune* rezultă

$$A_u = \frac{1{,}2 \text{ V}}{20 \text{ mV}} = 60.$$

* Rezistenţa de sarcină R_S se presupune foarte mare faţă de R_C.

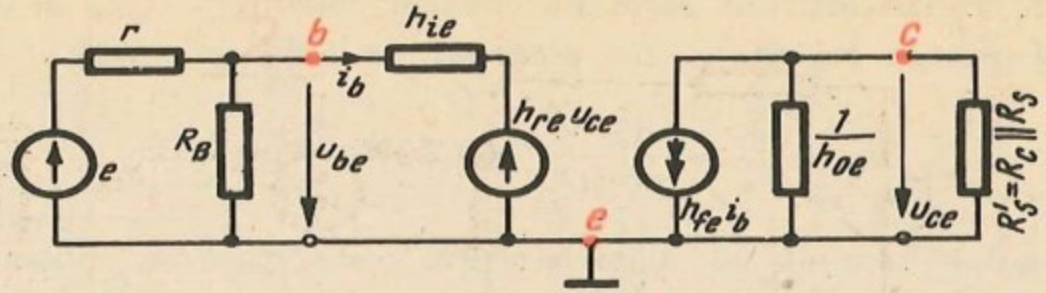


Fig. 5.67

Pentru a sublinia faptul că amplificatorul este inversor (de polaritate) indicăm amplificarea ca raport al imaginilor în complex ale tensiunilor u_{ce} şi u_{be}. Rezultă atunci

$$\underline{A}_u = \frac{\underline{U}_{ce}}{\underline{U}_{be}} = \frac{U_{ce}}{U_{be}} e^{j\pi} = -60.$$

Calculul amplificării amplificatorului se face pe schema echivalentă în c.a. a amplificatorului (fig. 5.67) în care se ignoră sursa de polarizare şi impedanţele condensatoarelor de cuplaj.

În calculul pe care-l vom face, vom considera valori tipice pentru parametrii tranzistoarelor utilizate pentru amplificarea semnalelor de j.f. (tabelul 5.1).

Tabelul 5.1

Valorile tipice ale parametrilor hibrizi

Parametru	*Valoare tipică*
h_{ie}	2 kΩ
h_{re}	10^{-4}
h_{fe}	100
$\frac{1}{h_{oe}}$	50 kΩ

Valoarea rezistenţei interne a generatorului poate fi cuprinsă în limite foarte largi, în funcţie de tipul sursei de semnal: pentru un generator de semnal din uzul laboratoarelor, rezistenţa r_g este de ordinul sutelor de ohmi; dacă sursa de semnal este un microfon cu cristal, atunci r_g poate fi de ordinul megaohmilor.

Circuitul din figura 5.67 poate fi simplificat făcînd următoarele aproximaţii:

— deoarece $R_B \approx 0{,}2$ MΩ, adică mult mai mare decît oricare altă rezistenţă, poate fi exclusă (curentul alternativ prin R_B este neglijabil);

 BeatriceGloria_personal library

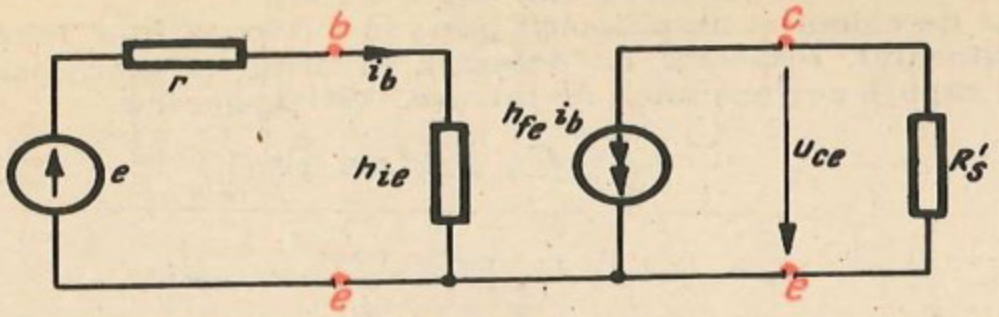


Fig. 5.68

— se poate exclude rezistenţa $\frac{1}{h_{oe}}$ de regulă mult mai mare decît $R'_S = R_S \| R_C$;

— putem neglija t.e.m. $h_{re}u_{ce}$, deoarece de regulă este mult mai mică decît u_{be} ($| h_{re}u_{ce} | \ll | u_{be} |$).

Circuitul practic pe care-l vom reţine pentru calculele ce urmează este arătat în figura 5.68.

Circuitul echivalent simplificat al tranzistorului, valabil pentru semnale mici, este redat separat, în figura 5.69.

Amplificarea în tensiune a amplificatorului se calculează utilizînd teorema a doua a lui Kirchhoff în poarta de intrare şi legea lui Ohm pentru rezistenţa de sarcină prin care trece curentul $h_{fe}i_b$, dependent de curentul de bază al tranzistorului.

Avem deci ecuaţiile

$$\begin{cases} e = (r_g + h_{ie})i_b; \\ u_{ce} = -R'_S h_{fe} i_b, \end{cases}$$

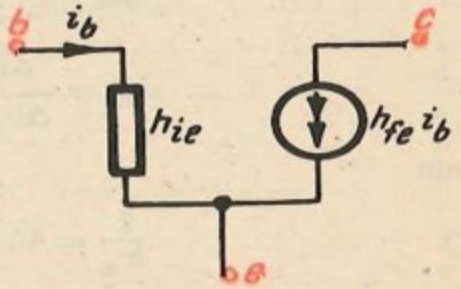


Fig. 5.69

din care rezultă:

$$u_{ce} = -R'_S h_{fe} \frac{e}{r_g + h_{ie}}.$$

Amplificarea în tensiune a amplificatorului este:

$$A_u = \frac{u_{ce}}{u_{be}} = \frac{-R'_S h_{fe} \dfrac{e}{r_g + h_{ie}}}{e_g \dfrac{h_{ie}}{r_g + h_{ie}}} = -\frac{h_{fe}}{h_{ie}} R'_S,$$

unde tensiunea u_{be} a fost calculată cu formula divizorului de tensiune:

$$u_{be} = e \frac{h_{ie}}{r_g + h_{ie}}.$$

Pentru rezistențe de sarcină comparabile cu h_{ie}, amplificarea este de ordinul de mărime al parametrului h_{fe} (~ 100).

Relația de calcul al amplificării pune în evidență funcțiunea de inversor a amplificatorului, respectiv de defazare în urmă cu π radiani a tensiunii de ieșire în raport cu tensiunea de intrare. Astfel, pentru

$$u_{be} = \underline{U}_{be} \sqrt{2} \sin \omega t,$$

rezultă:

$$u_{ce} = | A_u | U_{be} \sqrt{2} \sin (\omega t - \pi).$$

Aplicație. *În figura 5.66 se prezintă caracteristicile statice pentru un tranzistor npn. Determinați parametrii „h" în punctul static de coordonate:*

$$I_B = 200\ \mu A,\ I_C = 4{,}5\ mA,\ U_{CE} = 10\ V.$$

Desenați apoi circuitul diport echivalent pentru semnale mici.

Parametrii h_{ie} și h_{re} se determină pe caracteristicile statice de intrare, utilizînd relațiile de definiție:

$$h_{ie} = \left.\frac{\Delta u_{BE}}{\Delta i_B}\right|_{u_{CE} = U_{CE}}$$

$$h_{re} = \left.\frac{\Delta u_{BE}}{\Delta u_{CE}}\right|_{i_B = I_B}$$

Deoarece se dau numai caracteristicile statice de ieșire, nu putem determina decît parametrii h_{fe} și h_{oe}. Conform relațiilor de definiție,

$$h_{fe} = \left.\frac{\Delta i_C}{\Delta i_B}\right|_{u_{CE} = U_{CE}} = \frac{4\ \text{mA}}{200\ \mu\text{A}} = \frac{4\,000}{200} = 20;$$

$$h_{oe} = \left.\frac{\Delta i_C}{\Delta u_{CE}}\right|_{i_B = I_B} = \frac{0{,}5\ \text{mA}}{10\ \text{V}} = 50 \times 10^{-6}\ \text{mho}$$

sau

$$\frac{1}{h_{oe}} = 40\ \text{k}\Omega.$$

CUPRINS

Capitolul 1. **Electrotehnica cîmpului magnetic** 3

A. *Caracterizarea cîmpului magnetic. Mărimile și legile acestuia* ... 3

1. Cîmpul magnetic în vid. Forța lui Lorentz 3
2. Momentul magnetic 4
3. Forța lui Laplace 6
4. Forța lui Ampère 10
5. Formula lui Biot-Savart 12
6. Intensitatea cîmpului magnetic 14
7. Tensiunea magnetică. Teorema lui Ampère 15
8. Fluxul magnetic 17

B. *Circuite magnetice. Inductivitate* 19

1. Circuite magnetice 19
2. Legea lui Ohm pentru o latură de circuit magnetic 20
3. Teoria întîi a lui Kirchhoff pentru un nod de circuit magnetic 21
4. Teorema a doua a lui Kirchhoff 22
5. Analogia cu circuitele electrice 23
6. Inductivitate 24

C. *Electrotehnica fenomenelor de inducție electromagnetică* 27

1. Legea inducției electromagnetice 27
2. Inducția electromagnetică prin transformare 28
3. Inducția electromagnetică prin mișcare 30

D. *Energia magnetică și forțele magnetice* 31

1. Energia magnetică 31
2. Densitatea de volum a energiei magnetice 33
3. Forța magnetică 34

Capitolul 2. **Electrotehnica regimului permanent sinusoidal al circuitelor electrice** 36

A. *Elemente ideale de circuit în regim variabil* 36

1. Elemente de circuit pasive 36
2. Elemente de circuit active (surse ideale) 39

B. *Producerea tensiunii electromotoare sinusoidale. Mărimi cu variație sinusoidală în timp* 41
1. Principiul generatorului de curent alternativ 41
2. Mărimi periodice 43
3. Mărimi alternative; mărimi sinusoidale 44
4. Valoarea efectivă a unei mărimi periodice 45
5. Caracteristicile mărimilor sinusoidale 46
6. Reprezentarea vectorială a mărimilor sinusoidale 48

C. *Elemente ideale în regim sinusoidal* 50
1. Rezistorul ideal. Puterea activă 50
2. Bobina ideală. Reactanța inductivă. Puterea reactivă inductivă 52
3. Condensatorul ideal. Reactanța capacitivă. Puterea reactivă capacitivă 55

D. *Comportarea unor circuite simple în regim permanent sinusoidal* 57
1. Impedanța, admitanța, defazajul 57
2. Puterea activă, puterea reactivă și puterea aparentă 60
3. Circuitul R, L, serie 62
4. Circuitul R, C serie 65
5. Circuitul R, L, C serie. Rezonanța de tensiune 66
6. Circuitul R, L, C paralel. Rezonanța de curent 71

E. *Studiul circuitelor în regim sinusoidal cu ajutorul mărimilor complexe* 73
1. Proprietăți ale numerelor complexe 73
2. Reprezentarea în complex a mărimilor sinusoidale. Fazori 77
3. Caracterizarea în complex a circuitelor dipolare 78
4. Puterea aparentă complexă 79
5. Elemente pasive ideale de circuit studiate în complex 82
6. Circuite simple studiate cu fazori 82
7. Conexiunile impedanțelor 83

Capitolul 3. Circuite trifazate în regim permanent sinusoidal 85

A. *Generarea sistemului trifazat de tensiune electromotoare* 85

B. *Conexiunile generatoarelor și receptoarelor* 88
1. Conexiunea în triunghi 88
2. Conexiunea în stea 91

C. *Puterile în sisteme trifazate* 93
1. Conexiunea în triunghi 93
2. Conexiunea în stea 94

Capitolul 4. Producerea și transmiterea energiei electrice 95

A. *Generalități* 95
1. Sistem energetic 95
2. Sistem electric 95

B. *Compensarea puterii reactive. Îmbunătățirea factorului de putere* 97
1. Efectele circulației puterii reactive 98
2. Mijloace pentru reducerea circulației de putere reactivă 99

Capitolul 5. Circuite electrice și electronice neliniare 102

A. *Elemente neliniare de circuit. Prezentarea generală* 102

1. Lampa cu incandescență 104
2. Termistorul 105
3. Tubul baretor 105
4. Dioda semiconductoare 105

B. *Circuite electrice de curent continuu cu elemente neliniare. Determinarea punctului static, de funcționare* 109
1. Circuite cu un singur element neliniar 109
2. Asocierea elementelor neliniare 111

C. *Modele idealizate pentru diode cu caracteristică liniară pe porțiuni* 112

1. Dioda ideală 112
2. Modelul diodei cu sursă ideală de tensiune 113
3. Modelul diodei pentru semnal mic 115

D. *Utilizări specifice ale elementelor neliniare* 117

1. Redresarea tensiunilor alternative sinusoidale 117
2. Generarea oscilațiilor armonice 120
3. Tranzistorul ca amplificator 124